

PAES

Date : 08/10/12

Professeur : Sepulchre

Nombre de pages :

2012-2013

Physique

Ronéo n° : 5

Intitulé du cours : Optique
géométrique et ondulatoire



**Corporation des Carabins
Niçois**

UFR Médecine
28, av. de Valombrese
06107 Nice Cedex 2
www.carabinsnicois.com
vproneo.karpediem@gmail.com

Rédacteur : Claire Jaraudias

Partenaires



La médicale
assure les professionnels de santé

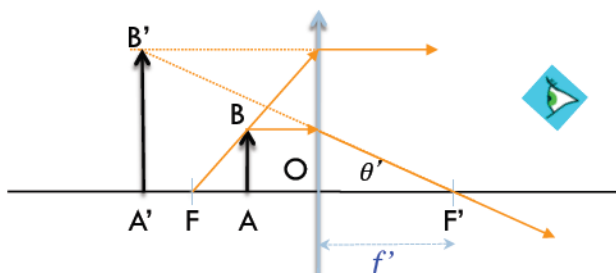
On va ici appliquer les règles de l'optique géométrique vues précédemment sur des systèmes optiques simples.

A. Systèmes optiques simples.

1. La loupe

Le plus simple des modèles optiques est la **loupe**. Elle permet d'augmenter le pouvoir séparateur de l'œil. La loupe est formée d'une seule lentille convergente.

L'idée est de placer l'objet AB entre le foyer optique F et l'origine O. Pour obtenir l'image voulue, on applique des règles simples telles que « tout rayon venant de l'extérieur et parallèle à l'axe optique est décliné en passant par le foyer image » ou encore « tout rayon qui passe par le foyer objet est décliné de façon parallèle à l'axe optique ». On obtient ainsi deux rayons, qui sont divergents par rapport à l'observation (*quand on se place du point de vue de l'œil ci-dessous, on voit bien que les rayons se séparent et donc divergent*), qui vont définir une image commune : On a alors une **image virtuelle, agrandie, de même sens que AB**. L'image est également **plus loin** de l'observateur (*la distance AB-O est plus petite que la distance A'B'-O*).



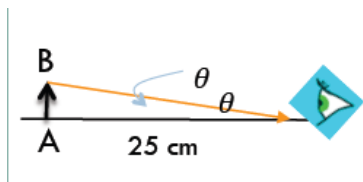
Pour comparer deux objets de taille différente, il n'est donc pas suffisant de regarder l'agrandissement, il faut également regarder **l'angle sous lequel cet objet est vu**.

On va donc caractériser la performance de la loupe par un **grossissement**, qui est défini par :

$$G = \theta' / \theta \sim \tan \theta' / \tan \theta = 0.25 / f'.$$

Avec θ' l'angle sous lequel l'image est vue, θ l'angle sous lequel l'objet est vu (*et \sim signifiant ici environ égal à*).

L'angle sous lequel l'objet est vu est un peu arbitraire, car cet angle varie un peu avec la distance qui nous sépare de l'objet. Pour spécifier le meilleur angle sous lequel on peut voir un objet, on prend alors le point le plus proche pour lequel l'image reste nette. On a vu la semaine dernière que ce point est le **punctum proximum (PP)**. En moyenne, ce PP vaut **25cm**. On a ainsi redéfini un nouvel angle θ qui va être comparé à θ' . On peut également utiliser l'approximation des tangentes, qui rend le calcul plus simple.



$\tan \theta' = AB / f'$ (Car on se place ici dans un triangle rectangle et que tant $x = \text{côté opposé} / \text{côté adjacent}$)

$\tan \theta = AB / PP$ (converti en m).

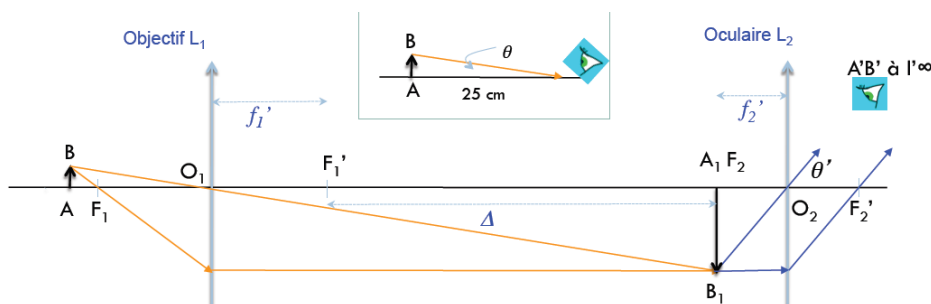
On obtient ainsi **$G = \tan \theta' / \tan \theta = PP / f' = 0,25 / f'$** .

L'inverse de f' s'exprime en dioptries et correspond à la **puissance P de la loupe**. Comme le PP vaut généralement 0,25m, on obtient alors **$G = 0,25P$** .

2. Le microscope

Le microscope est constitué de deux lentilles convergentes : C'est un **doublet de lentilles convergentes**. Ces deux lentilles sont respectivement appelées **objectif** et **oculaire**. (*L'objectif est la première lentille convergente que rencontrent les rayons lumineux sur leur trajet et ensuite ce sera l'oculaire cf dessin, c'est important à savoir*).

On va placer l'objet AB le plus près possible du foyer objet, en restant devant celui-ci. On considère ensuite son image, obtenue grâce aux lois de l'optique. On voit que plus on rapproche l'objet de f_1 , plus long va être alors le parcours des rayons lumineux.



La distance qui sépare le foyer image f' de l'endroit où est placé l'image est appelé **l'intervalle Δ** . Cet intervalle Δ doit être le plus grand possible pour des constantes données.

En ce qui concerne l'oculaire L_2 , on le place de façon à ce que son **plan focal oculaire coïncide avec l'image A_1B_1** . Ainsi, l'image A_1B_1 va être transformée en des rayons parallèles entre eux. Pour construire la direction de ces rayons, il faut utiliser un rayon qui traverse le centre optique O_2 et tous les rayons issus de B_1 seront également parallèles à ce rayon (*L'explication n'est pas très claire, regardez le schéma et vous comprendrez*). On obtient de cette façon **des rayons qui sont parallèles entre eux et qui permettent de « faire comme si l'objet était à l'infini »**. C'est la solution la plus confortable pour l'œil, c'est la position qui le fatigue le moins.

Comment caractériser la performance d'un microscope ? D'après ce graphe, on remarque que l'objet peut être vu sous l'angle θ' (défini par rapport à l'image A_1B_1). De la même façon que pour la loupe, on compare l'angle θ' que l'on compare à l'angle θ .

Pour calculer ce rapport, on va utiliser le fait que dans le triangle $(A_1B_1F_2)$, $\tan \theta' = A_1B_1/f_2'$ et $\tan \theta = AB/PP$. Pour l'instant, on ne connaît pas A_1B_1 . Pour le connaître, on doit utiliser deux triangles semblables (O_1AB) et $(O_1A_1B_1)$. Dans ces deux triangles semblables, on a : **$A_1B_1/O_1A_1 = AB/O_1A$** (*Allez, un petit effort, il faut vous souvenir de cette règle sur les triangles semblables vue en terminale*).

Puisque d'habitude, la distance f_1 est petite devant Δ , alors on peut approximer par O_1A_1 par Δ . De la même façon, on peut approximer O_1A par f_1 car f_1A est petit devant f_1 .

On en déduit donc que **$A_1B_1 = AB\Delta/f_1$** .

Par simplification et remplacement, on peut conclure que **$G = \tan \theta' / \tan \theta = 0,25\Delta / (f_1f_2')$** . C'est pratique car ce grossissement peut être calculé **indépendamment de la taille de l'objet AB**.

Remarque : Que ce soit pour la loupe ou pour le microscope, le grossissement a un côté subjectif puisqu'il dépend d'une quantité qui dépend de la personne (le PP varie en fonction de chaque individu, il n'est pas forcément égal à 25cm). D'autres instruments comme le télescope (doublet de lentilles) sont indépendants du PP.

Exercice. On considère un microscope dont l'intervalle optique est 20 cm, et dont les distances focales de l'objectif et de l'oculaire sont respectivement 1cm et 5cm.

- A) Le grossissement de ce microscope est 100
- B) Le grossissement de ce microscope est 200
- C) la puissance de l'oculaire de ce microscope est 10 δ
- D) la puissance de l'oculaire de ce microscope est 20 δ
- E) Aucune des affirmations n'est correcte

Réponse : A, D

- A) $G = 0,25 \times 20 \cdot 10^{-2} / 5 \cdot 10^{-4} = 100$. VRAI
- B) FAUX
- C) $P = 1/5 \cdot 10^{-2} = 20\delta$ (Attention, on ne prend en compte que la distance focale de l'oculaire !) FAUX
- D) VRAI
- E) FAUX

NB : Un bon microscope a un grossissement d'environ 500. Avec de très bons intervalles optiques, on pourrait obtenir des microscopes ayant des grossissements de un million. Le fait est que si l'on obtenait de tels microscopes, on va avoir une image qui va être floue. *Je vous mets ici la diapo du prof qu'il a relue mot pour mot.*

Remarque: les limites de l'optique géométrique

Tel que nous avons présenté, le microscope ne semble pas limité, dans son principe physique, pour observer les détails arbitrairement petits d'un objet donné. Il suffirait d'utiliser un objectif et un oculaire assez puissants, et un grand intervalle optique.

Or il apparaît expérimentalement que lorsque la dimension d'un objet devient inférieure à $1\mu\text{m}$, les détails ne sont plus résolus, quelque soit le grossissement du microscope.

En fait dans cette situation, il faut rappeler qu'une des hypothèses initiales de l'optique géométrique est que la dimension des objets en jeu doit rester grande par rapport à la longueur d'onde de la lumière. Or, celle-ci est précisément de l'ordre de quelques dixièmes de μm .

Pour comprendre et décrire les phénomènes qui apparaissent lorsque la taille des objets éclairés par les sources lumineuses devient trop petite, il faut revenir sur le caractère ondulatoire de la lumière. C'est le but des chapitres suivants, qui conduiront notamment à mettre en évidence une limitation intrinsèque à la résolution de tout instrument optique, et en particulier à celle de l'acuité visuelle.

B. Interférences

On va ici étudier le cas le plus simple, c'est-à-dire les interférences occasionnées par deux sources ponctuelles.

Les interférences proviennent en optique de l'addition de signaux sinusoïdaux qui présentent entre eux des différences de chemin optique ou de temps de propagation (*cela revient au même de dire l'un ou l'autre*). Ce qui est mesuré ici est **l'intensité lumineuse**. Quand on mesure la lumière, on la mesure toujours à travers l'intensité lumineuse, c'est-à-dire à travers la puissance des particules lumineuses.

De plus, un appareil mesure une intensité lumineuse sur un intervalle de temps et on effectue ensuite une moyenne : On ne la mesure pas instantanément.

Cette intensité lumineuse est proportionnelle à la moyenne temporelle du carré des signaux électriques résultants.

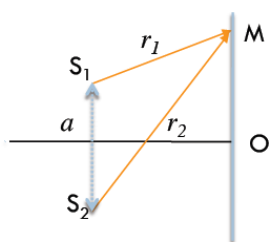
1. Interférences provoquées par deux sources d'onde (monochromatique et synchrone)

◆ Cas général.

Le calcul suivant qui est « très simple » va nous permettre de comprendre le phénomène d'interférences. On place un détecteur en un point M afin de mesurer l'intensité lumineuse. Ce point se trouve à une distance r_1 de la source S_1 et à distance r_2 d'une source S_2 .

On suppose que le champ électrique au point M est le résultat d'une onde qui s'est propagé de S_1 à M et d'une autre onde s'étant propagée de S_2 à M (les amplitudes de ces deux ondes initiales étant les mêmes dans notre cas simplifié), l'onde ayant une forme sinusoïdale (forme cosinus par exemple). **L'argument de cette fonction dépend du temps et de l'espace.** On voit ci-dessous que l'amplitude de l'onde résultante dépend bien du temps puisque ωt intervient dans la formule, il y a également un épiphase (=décalage) qui apparaît qui va dépendre de l'endroit où l'on regarde, ici à distance r_1 de la source S_1 et à distance r_2 de la source S_2 .

Le prof ne détaille pas le calcul, reprenez seulement la formule encadrée, la démonstration n'est pas à connaître !



Intensité résultante en M:

$$I = \langle \psi^2 \rangle = 4I_0 \cos^2\left(\pi \frac{\delta}{\lambda}\right)$$

La différence de chemin optique entre les 2 ondes est: $\delta = r_2 - r_1$.

L'amplitude de l'onde résultante au point M :

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

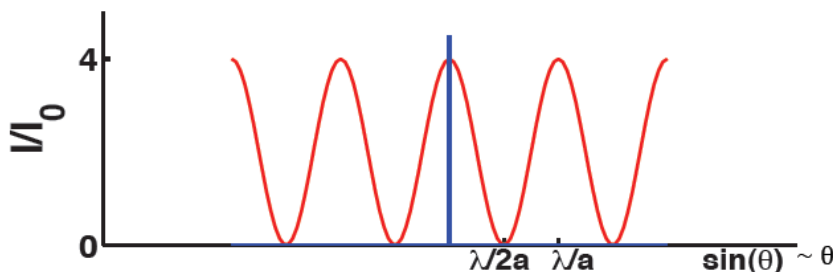
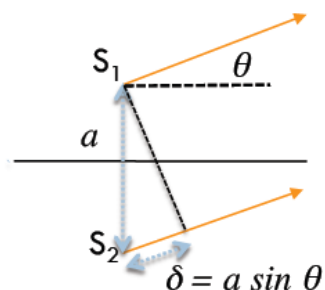
$$= A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right) + A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right)$$

$$= 2A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{\lambda} (r_1 + r_2)\right) \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} (r_2 - r_1)\right)$$

(En ayant calculé: $I = \langle \cos^2(\omega t + \phi) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \phi) dt = \frac{1}{2}$ $I_0 = \frac{A^2}{2}$)

NB : La notion de temps a ici finalement disparu (puisque ωt n'intervient pas dans la formule finale de l'intensité lumineuse). La dépendance est donc seulement spatiale.

◆ On se place maintenant dans le cas où le point M est très éloigné, de sorte que les rayons issus des sources S_1 et S_2 soient parallèles entre eux. Donc ici, on suppose que $\theta = \theta'$. On note a la distance entre les deux sources S_1 et S_2 .



Dans ce cas, la différence de chemin optique δ est donnée uniquement par la distance que l'on obtiendrait en reportant S_1 sur la direction du rayon S_2 (regardez le schéma au-dessus, ce sera plus clair encore une fois). On a donc en fait une sorte de petit retard de S_2 par rapport à S_1 car S_1 semble plus proche de M.

Il faut retenir que $\delta = a \sin \theta$ avec a la distance entre les deux sources et θ l'angle entre la direction du rayon lumineux issu de S_1 et l'horizontale.

On va maintenant étudier une formule un peu plus précise sur la description de l'intensité lumineuse en fonction de l'angulité θ :

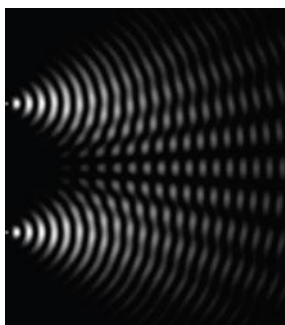
$$I = 4I_0 \cos^2\left(\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta\right)$$

Comme l'angle θ est en réalité très petit, on peut approximer $\sin\theta \approx \theta$. Ainsi, sur un graphe (*voir ci-dessus*), on obtient une fonction périodique sinusoïdale avec une période angulaire égale à λ/a . Pour que cela ait un sens, il faut **que a soit de l'ordre de grandeur de λ - ou éventuellement un peu plus petit**-mais si a est beaucoup plus grand que λ , la variation va être très rapide (*car la période sera très petite*), on va avoir des maxima et des minima extrêmement rapprochés et on ne va plus pouvoir distinguer aucun phénomène d'interférence, l'étude sera donc inutile.

On va donc observer des régions où l'intensité lumineuse sera maximale, d'autres où elle sera minimale et entre ces deux régions des zones de « tranches lumineuses ». L'intensité ne sera jamais tout à fait égale à zéro physiquement mais l'approche de près.

On peut voir que l'intensité lumineuse varie périodiquement entre I_0 et $4I_0$ avec :

- Des **franges claires correspondant à des maxima de I dans des directions telles que $\sin\theta = k\lambda/a$.**
- Des **franges sombres correspondant à des minima de I dans des directions telles que $\sin\theta = (k+1/2)\lambda/a$**
(+++ pour le concours !!)



Ceci est le résultat d'une simulation numérique en 2D, on voit bien qu'il y a des variations périodiques apparaissant surtout lorsque l'on s'éloigne des sources. C'est le phénomène **d'interférences constructives**.

Il faut retenir que si λ/a est assez petit, l'intervalle angulaire entre deux franges sombres ou deux franges claires est : $\Delta\theta = \lambda/a$ (avec $\Delta\theta$ mesuré en radians). Lorsque l'on rapproche les deux sources l'une de l'autre (a diminue), la distance angulaire augmente et inversement.

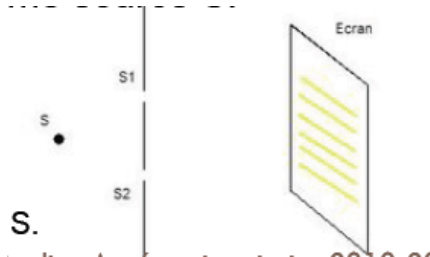
On a ici étudié le cas le plus simple puisqu'on a étudié le cas de deux sources ponctuelles monochromatiques de même longueur d'onde et on peut remarquer qu'il n'y avait pas non plus de déphasage entre les ondes, ce qui aurait compliqué les choses : **Les sources étaient synchrones et en phase**. Mais c'est loin d'être le cas dans la majorité des cas.

Remarques :

-Si on ne considère plus que les deux sources sont en phase, la fonction \cos^2 est « décalée », ce qui signifie que les maximums d'intensité ne seront pas situés au même endroit sur les deux sources S_1 et S_2 .

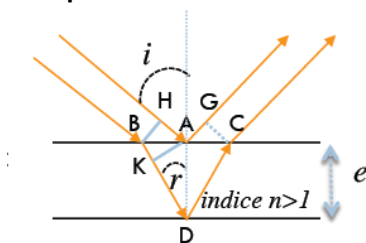
-En réalité, lorsqu'on prend une lampe à incandescence ou une lampe à néon, celle-ci est constituée d'atomes qui vont émettre constamment des rayons lumineux, c'est-à-dire que les atomes sont comme deux sources qui envoient des rayons lumineux. Les atomes émettent des « trains d'onde lumineuse » de façon un peu aléatoire et la phase qui existe entre les deux sources varie constamment au cours du temps. Ces phases relatives changent environ tous les 10^{-8} ou 10^{-9} s. Cela détruit donc le phénomène d'interférence à l'échelle visuelle (1/20s). **Donc, pour les sources de lumière courante, les phénomènes d'interférence disparaissent à cause de leur asynchronisme : C'est ce qu'on appelle l'incohérence entre les sources. Pour observer des phénomènes d'interférence, on utilise des sources cohérentes.**

-Une façon d'obtenir des sources cohérentes est soit d'utiliser des technologies telles que le **laser** (Le laser, par définition, émet de la lumière de façon cohérente) soit d'utiliser des dispositifs plus anciens tels que les **fentes de Young**. Ce dispositif consiste à avoir une source unique derrière un obstacle ou un écran percé de fentes (les fentes jouent le rôle des sources) et comme ces sources (ici il y en a deux : S1 et S2) sont alimentées par une source commune S, alors les rayons émis arrivant sur les deux sources sont cohérents. On peut ainsi obtenir des phénomènes d'interférence.



2. Interférences dans les lames minces

On considère un **milieu transparent mince délimité par deux dioptrés** (lame de verre, membrane d'une bulle de savon...). En éclairant la lame avec une source monochromatique constituée de deux rayons, on peut observer des **franges dues à l'interférence entre la lumière réfléchie sur le premier dioptré et celle réfléchie sur le second** (qui traverse deux fois la lame). En effet, **les rayons subissent deux sortes de réflexion : Directe** (=réflexion sans avoir traversé le milieu) **ou indirecte** (=réflexion après traversé le milieu). Au final, on obtient tout de même deux rayons qui sont **parallèles entre eux**.



Les deux rayons parallèles obtenus sont caractérisés par des chemins optiques différents. Le rayon n'ayant pas fait le trajet à travers la lame mince a fait un trajet plus court que celui l'ayant parcourue. Si on observe plus en détail ces deux rayons, on va observer des **phénomènes d'interférences**. *Le prof vous passe le calcul détaillé, je ne vous le mets pas non plus, ça n'a aucune chance de tomber au concours mais pour les curieux : Diapo 16 du poly d'optique géométrique et ondulatoire. Retenez seulement le résultat suivant :*

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\pi \frac{\delta}{\lambda}\right) \quad \text{avec} \quad \delta = 2ne \cos r + \frac{\lambda}{2}$$

Avec e l'épaisseur de la lame, n l'indice du milieu et r l'angle sous lequel on a regardé la réflexion (= réflexion à l'intérieur de la lame). Cet angle r donne accès à i par la loi de Descartes : $n \sin r = \sin i$ (avec i l'angle d'incidence). Donc le chemin optique dépend indirectement de i . Lorsque l'on a une réflexion d'un milieu plus réfringent vers un milieu moins réfringent, il y a alors inversion du champ électrique, on change de signe et cela correspond à augmenter le chemin optique d'une valeur de $\lambda/2$.

Cela donne de manière générale un **phénomène de coloration**. Si l'on part avec une lumière blanche sur de l'huile en très fine couche, il va y avoir coloration à cause des interférences. L'écart angulaire des franges augmente lorsque l'épaisseur e de la lame diminue. **Si la source est étendue et n'est pas monochromatique, des franges colorées se produisent à des positions différentes suivant la longueur d'onde.** On observe facilement ces franges sur une mince flaque d'huile : Dans les phénomènes d'interférence, si on considère des longueurs d'onde différentes, on va faire apparaître des maxima (c'est-à-dire des franges claires). Comment δ peut-il varier ? On sait que δ est lié à l'épaisseur de la couche en question. Donc **si l'épaisseur varie, des franges vont apparaître avec des couleurs différentes.**

NB : Il est écrit dans la diapo que l'écart angulaire des franges vaut λ/δ . Attention, c'est faux donc pour ceux qui lisent les diapos, ne l'apprenez pas !

On étudie maintenant une autre façon d'obtenir ces phénomènes d'interférence sur des lames minces, en supposant que la source de lumière soit étendue. Si on se place à une certaine distance et qu'on regarde la surface en question de la lame mince, puisque les angles incidents i_1 et i_2 sont différents, cela va faire varier le δ car le cos va varier (*on a vu que i est dépendant de r*). Et puisque cela fait varier δ , cela fait également varier la région sur laquelle on voit des maxima avec des positions différentes selon les couleurs. C'est ce qui se passe dans le cas d'une **bulle de savon** car sa surface est trouble mais au finale, le phénomène de coloration naturel de la bulle est dû aux variations de δ (elle-même due aux variations d'épaisseur...).

Application : Couche antireflet (+++)

Cela consiste à essayer de **supprimer les phénomènes de réflexion**. Pourquoi est-ce important d'essayer de diminuer la réflexion ? Car lorsqu'on considère une certaine intensité I_i liée à une incidence normale (=perpendiculaire à la surface de la lame mince) et que sur cette surface, il y a une certaine intensité I_r qui est réfléchie, alors on **perd une partie de**

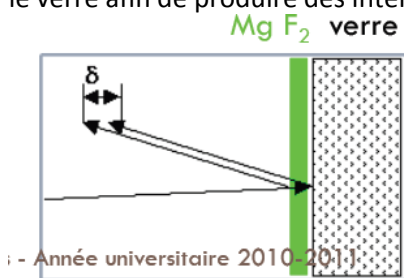
l'énergie et la loi de conservation de l'énergie n'est plus vérifiée. $I_i = I_t + I_r$ (avec I_t l'intensité transmise) donc par réflexion, on perd forcément une partie de l'intensité lumineuse et donc, par conséquent, de l'énergie.

On peut montrer que, sur du verre par exemple, le rapport entre l'intensité réfléchie et l'intensité incidente donné par la formule ci-dessous dépend en fait des indices n_1 et n_2 entre les deux milieux incident et transmis. Si on prend de l'air par rapport à du verre, sachant que l'indice de l'air est égal à 1 et que celui du verre vaut 1,5, alors le rapport I_r/I_i vaut 0,04 soit 4%. Donc I_i (100%) = I_r (4%) + I_t (96%).

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}$$

Un instrument optique est composé de plusieurs lentilles et de plusieurs lames en verre. Si à chaque passage de l'intensité lumineuse dans une lame ou une lentille, on perd 8% de l'intensité lumineuse (8% et non plus 4%, car pour chaque lame il y a une phase d'entrée et une phase de sortie où l'intensité lumineuse est à chaque fois réfléchie), cela finit au bout du compte par faire des quantités perdues non négligeables. On peut faire le calcul que pour une dizaine de lentilles, il y a 44% de l'énergie lumineuse qui est dilapidée sous forme d'intensité réfléchie !

Pour réduire cette réflexion, on peut déposer sur la lame de verre une fine couche d'un matériau moins réfringent que le verre afin de produire des interférences négatives. C'est ce qu'on appelle la **couche anti-reflet**.



On développe cette fois-ci le calcul sous forme de champ électrique. On a un champ électrique incident E_i de direction verticale vers le bas (car le champ électrique est perpendiculaire à la direction de propagation) et un champ électrique dû à la réflexion directe E_{1r} et un autre champ électrique dû à la réflexion indirecte E_{2r} (après avoir traversé la couche anti-reflet). Ces deux champs électriques obtenus sont **parallèles entre eux**. On cherche ici à ce que **$E_{1r} + E_{2r} = 0$** .

Autrement dit, dans le calcul de l'intensité en fonction de δ , il faudrait que δ/λ soit égal à $\frac{1}{2}$ avec **$\delta = 2en$** .

Il faut choisir un indice optique de la couche de reflet intermédiaire entre celui du verre et celui de l'air ici (donc $1 < n < 1,5$). Pourquoi ? D'une part l'expérience montre que c'est la façon optimale d'obtenir des interférences négatives (=destructives) qui vont provoquer le fait que $I_r = 0$ et d'autre part quand on passe de la couche anti-reflet vers le verre, on passe toujours d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent. Le paramètre λ/e n'apparaît alors pas dans le calcul de la différence de chemin optique (*le prof n'explique pas plus que ça, et il n'y a rien d'écrit de plus sur la diapo...*).

Au final, on voit que $\delta=2en=\lambda/2$ donc l'épaisseur correspondante e est égale à $\lambda/4n$.

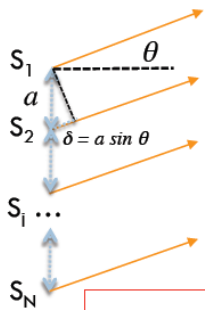
Donc dans le cas où $e=\lambda/4n$ alors $\delta=\lambda/2$, et on peut alors obtenir des interférences destructives qui vont permettre d'annihiler les deux ondes réfléchies. Cela n'est donc valable que pour une seule valeur de λ . Quand on a une lumière blanche, il y a plusieurs longueurs d'onde possibles, l'idéal est de prendre une longueur d'onde moyenne avec $\lambda=500$ nm (jaune). En pratique, pour la couche de reflet, on utilise un matériau que l'on appelle le fluorure de magnésium d'indice optique 1,38.

Application numérique : Pour $n=1,30$ et $\lambda=0,55\mu\text{m}$, alors $e=0,1\mu\text{m}$.

Déposer une couche si mince sur une telle lentille nécessite des procédés avancés tels que l'évaporation sous-vide pour arriver à contrôler le dépôt de matériau avec une épaisseur aussi fine.

3. Généralisation : Interférences à N sources (=Réseau optique)

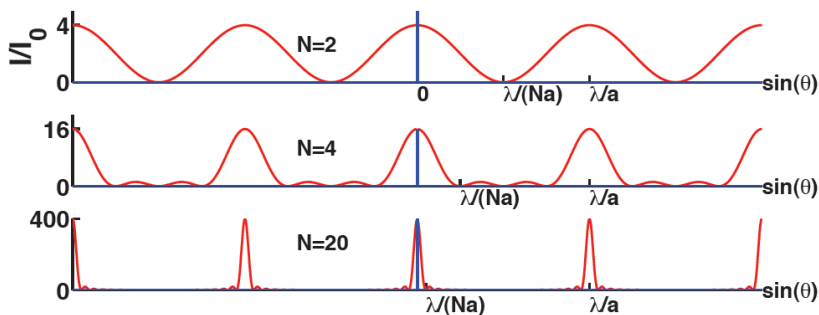
On généralise le concept d'interférences à deux sources en éclairant (par exemple avec un laser) une plaque opaque percée de N fentes minces espacées de a où **a est le pas du réseau**. Pour simplifier, on suppose que la distance d'observation est suffisamment éloignée pour que la direction soit commune à chacune des sources, caractérisée par un même angle θ . On suppose que l'amplitude A des champs électriques de chacune des sources est la même.



Après de nombreux calculs mathématiques qu'il vous épargne, on obtient la formule suivante :

$$\cos(\phi) + \cos(\phi + \alpha) + \dots + \cos(\phi + (N - 1)\alpha) = \cos\left(\phi + \frac{N-1}{2}\alpha\right) \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$$

On regarde sur la graphie cette fonction pour comprendre de quoi il s'agit (*ouuf*) :



On remarque d'abord qu'on se ramène au premier cas où N était égal à 2 sources. Cette fonction se simplifie et redonne une fonction en \cos^2 avec des variations que l'on a déjà vues (en sinusoides) où la longueur d'onde vaut ici λ/a .

Si on augmente le nombre de sources, il y a, à l'observation, trois phénomènes qui apparaissent :

- ❖ **Les franges claires deviennent de plus en plus étroites**, elles deviennent « piquées », **presques ponctuelles** si le nombre de sources augmente beaucoup (pour $N=20$ par exemple). Dans un système optique de cette nature- que l'on appelle **réseau optique**- il peut y avoir jusqu'à plusieurs centaines de sources, donc les franges claires disparaissent presque. On peut donc remarquer que la largeur de ces « pics » est inversement proportionnelle au nombre de sources. Donc $\Delta\theta = \lambda / Na$ avec $\Delta\theta$ représentant la largeur d'un pic. Et Na représente en fait la distance totale entre la première et la deuxième source.
- ❖ **La position elle-même des franges claires reste la même.**
- ❖ **L'intensité de chaque pic augmente considérablement.** Sur le graphe, elles paraissent identiques mais on peut en fait voir que l'échelle n'est pas du tout la même pour les différentes valeurs de N . **L'amplitude augmente du carré du nombre de sources.** (Explication : Pour $N=2$, $A \rightarrow 4$, pour $N=4$, $A \rightarrow 16$, pour $N=20$, $A \rightarrow 400$).

Quelles sont les applications possibles ? Comme la position de chaque pic dépend de la longueur d'onde, si l'on met de la lumière blanche sur un réseau optique, alors des pics de longueur d'onde différentes avec des couleurs associées différentes vont se situer à des positions différentes. On va alors pouvoir distinguer différentes composantes de cette lumière et comme les pics sont très fins, on peut les distinguer de façon assez précise : La résolution optique est par exemple meilleure que celle d'un prisme alors que celui-ci est utilisé en tant que spectroscope. **Le réseau optique est donc un très bon spectroscope.**

On va maintenant définir le **pouvoir de résolution** d'un réseau optique. On se pose donc la question suivante : Pour un réseau donné, quelles sont les longueurs d'onde et donc le $\Delta\lambda$ pour lequel on pourra observer nettement des pics ?

On dit que **dans l'ordre k** le pouvoir de résolution d'un réseau optique est : **$(\Delta\lambda/\lambda)_{\min} = 1/(kN)$ (+++ !).**

En effet, la largeur angulaire du k ème pic étant λ/Na , le réseau d'ordre N permet de séparer ce pic de celui qui serait produit par un rayonnement $\lambda + \Delta\lambda$, situé en $k(\lambda + \Delta\lambda)/a$ pourvu que $k\Delta\lambda/a > \lambda/Na$.

Expérience : On peut réaliser des phénomènes d'interférences à N sources de façon un peu plus ludique. On prend par exemple deux supports qui ressemblent à des CDs (Un CD et un DVD) , peut-on les distinguer l'un de l'autre alors qu'il n'y a aucune inscription sans faire aucune mesure, en regardant simplement la lumière (Le CD et le DVD sont tous les deux colorés). Il faut, pour résoudre ce problème, savoir que le pas du réseau d'un DVD est plus fin que celui du réseau d'un CD. De plus, ces deux supports ont tous deux à leur surface des « spirales d'alvéoles », ce qui permet d'avoir une lecture laser afin de « lire » la musique ou le film. En partant de ces connaissances, on prend les deux supports et on fait varier les positions de la lumière blanche. Dans un premier temps, on se place dans la position $k=0$ (il n'y a alors aucune interférence) et on fait ensuite tourner les deux supports, on voit alors des couleurs apparaître. Le support sur lequel les couleurs sont apparues le plus vite (avant l'autre) est le CD car, les trous étant plus espacés les uns des autres, a est plus grand et donc λ/a est plus petit.

Exercice. On considère un réseau optique mesurant 1 cm de largeur, dont les fentes sont espacées tous les 20 microns.

Cet élément est éclairé par un faisceau de lumière blanche parallèle à l'axe optique.

- A) Pour la longueur d'onde $\lambda = 600$ nm on observe un maximum d'intensité dans la direction qui fait un angle de 0.03 radians par rapport à l'axe optique.
- B) Ce maximum d'intensité est le pic d'ordre 1 des interférences du réseau à la longueur d'onde considérée.
- C) Si on double le nombre de fentes sur ce réseau, il existera encore un maximum d'intensité dans cette direction pour $\lambda = 600$ nm.
- D) Le pouvoir de résolution de ce réseau dans l'ordre 1 est de 1/500.
- E) Aucune de ces affirmations n'est correcte.

Réponses : A, B, C, D.

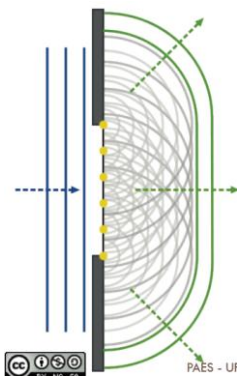
- A) Les maximums se situent tous les $\lambda/a = 600 \cdot 10^{-9} / 20 \cdot 10^{-6} = 0,03$. VRAI
- B) C'est vrai $\lambda/a = 0,03$ pour $k=1$.
- C) Si on double le nombre de fentes, alors le pas du réseau est divisé par deux, donc $a = 10^{-5}$. D'où $\lambda/a = 0,06$. Pour $k=5$, on observe un maximum de 0,03. Donc VRAI
- D) $\Delta\lambda/\lambda = 1/N$ (car $k=1$). $N = \text{taille du réseau} / \text{pas du réseau} = 10^{-2} / 20 \cdot 10^{-6} = 500$. Donc $1/N = 1/500$. VRAI
- E) FAUX

C. Diffraction

La diffraction est un phénomène voisin de celui des interférences. Il provient d'un phénomène de variation de l'intensité lorsque l'on fait passer une **onde lumineuse** (on parle ici d'onde lumineuse, mais ce phénomène s'observe également sur d'autres types d'onde : sonores...) **sur un obstacle ou dans une ouverture dont les dimensions sont comparables à celle de la longueur d'onde**. De l'autre côté de l'obstacle, les rayons lumineux ne vont plus être parallèles à l'obstacle mais vont partir dans toutes les directions.

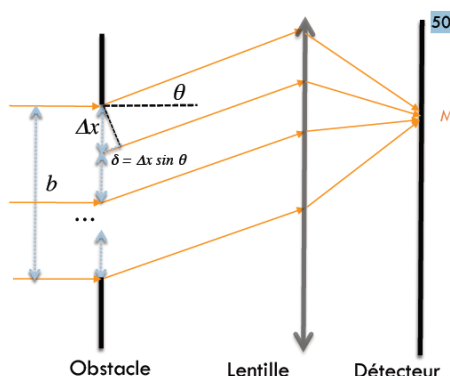
1. Principe de Huygens-Fresnel

Pour étudier un tel dispositif, on utilise le **principe de Huygens-Fresnel**. Il montre que **de l'autre côté de l'obstacle, la propagation des ondes peut être décrite comme celle d'une infinité de sources lumineuses qui seraient disposées sur l'ouverture**. Dans ce cas-là, on peut ramener le problème de la diffraction à celui des interférences avec un nombre infini de sources.



2. Diffraction par une seule fente

Comment expliquer ce principe mathématiquement ? On considère que l'on a un certain nombre de sources qui sont séparées les unes des autres par une distance Δx à l'intérieur de l'ouverture de longueur d . On se ramène dans un premier temps au problème de l'interférence. On a un nombre de fentes égal à $d/\Delta x$.



Pour calculer cette fonction d'interférence, on trouve une fonction \sin^2 et on fait tendre Δx vers 0. Le prof passe les détails des calculs (que vous trouverez en annexe pour les plus courageux), la fonction que l'on obtient de cette façon est :

$$I_b = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}\right) \text{ avec la fonction "sinus cardinal": } \text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Cette fonction, très utilisée en optique, est proportionnelle à $(\sin x/x)^2$. Comme cette fonction revient fréquemment dans les calculs, on a défini la fonction « sinus cardinal », comme décrit ci-dessus. Cette fonction a été obtenue toujours selon l'hypothèse que l'on se place très à distance afin que les rayons des sources qui nous parviennent soient parallèles.

Une autre façon de réaliser cette condition est de considérer une lentille convergente (voir schéma ci-dessus) et de placer l'écran au foyer image de cette lentille. De cette façon, l'ensemble des rayons parallèles va converger en un seul point sur le plan focal image et on va en fait collecter l'ensemble des intensités. On appelle cette configuration de diffraction la **diffraction de Fraunhofer**. Il existe aussi la **diffraction de Fresnel** qui s'étudie lorsque l'écran d'observation n'est pas très éloigné de l'obstacle diffractant.

La fonction sinus cardinal a un maximum d'une certaine largeur au centre et puis des maximales secondaires qui deviennent de plus en plus petites sur les bords : On observe donc une **tâche centrale très lumineuse et des tâches satellites beaucoup moins lumineuses**.

La tâche centrale s'annule lorsque l'argument $\sin \theta = \lambda/b$. On devrait en fait considérer $2\lambda/b$ et non pas λ/b car la tâche lumineuse est symétrique et que la moitié de cette tâche vaut λ/b . « C'est une caractéristique très intéressante à retenir de la diffraction ».

Le prof n'en parle pas à l'oral, mais l'année dernière il avait insisté dessus et le professeur Sepulchre le met en valeur dans ses diapos, je pense que c'est surement un oubli donc je vous mets la partie de la diapo qu'il a oublié de traiter :

Les positions des minima de I_b
sont données par:

$$\frac{\pi b \sin \theta_k}{\lambda} = k\pi \quad \text{Donc: } \sin \theta_k = k \frac{\lambda}{b}, \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Plus la fente de largeur b est étroite, plus la tâche centrale est étalée.
Dans l'approximation des petits angles, sa largeur angulaire vaut:

$$\Delta \theta = 2 \frac{\lambda}{b}$$



3. Exemples de manipulations physiques

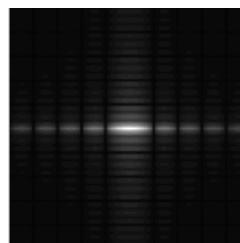
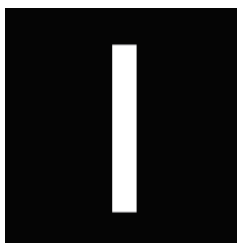
Cette condition de diffraction peut être représentée de plusieurs façons :

- ☒ **Faire passer de la lumière blanche à travers une fente** et on peut observer sur un écran placé dans le plan focal de la lentille ces figures de diffraction avec la tâche centrale au centre (*Merci*) avec une intensité qui s'annule et des tâches secondaires. On peut remarquer que **la figure de diffraction sur l'écran est perpendiculaire à la fente**. Si on augmente maintenant la taille de l'ouverture, λ/b diminue donc on va avoir un phénomène de diffraction avec plus de maxima que dans le cas précédent.

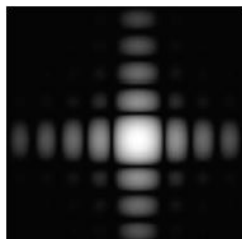
Obstacle pour une
source lumineuse cohérente



Écran en champ lointain
(diffraction de Fraunhofer)

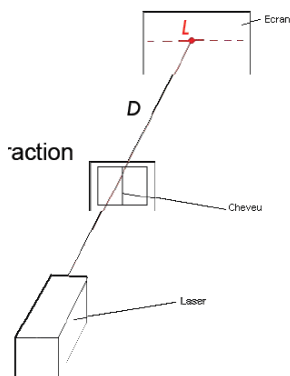


- ☑ On peut montrer que la diffraction par une **ouverture carrée** de côté b est le **produit des intensités diffractées par des fentes (verticales et horizontales) de même largeur**. Ici, il faut deux angles pour repérer le détecteur, soit θ et ϕ . On obtient alors : $I(\theta, \phi) = I_b(\theta) \cdot I_b(\phi)$.



Comme à chaque fois, **la position des tâches satellites dépend de la longueur d'onde**. Donc si on travaille en lumière blanche et que l'on observe la figure de diffraction, on va de nouveau avoir un phénomène de coloration de chaque côté de la tâche centrale. (Pour voir la photo correspondante (je ne vous la mets pas puisque la ronéo ne sort pas en couleur), diapo27)

- ☑ La figure de diffraction par un **fil d'épaisseur b** est semblable à la diffraction par une fente d'épaisseur b . Une expérience classique consiste à observer la **diffraction d'un champ laser par un cheveu** (au lycée, vous aviez déjà du le faire). Pour que ce principe marche, il faut que le cheveu et la fente ait la même épaisseur et la même forme. Si l'écran est à une distance D du cheveu et que la tâche centrale a une largeur totale L , on en déduit que l'épaisseur b du cheveu est telle que $L/D = \Delta\theta = 2\lambda/b$ (QCMs ++)



Exercice. On éclaire un cheveu avec un faisceau laser ($\lambda = 600 \text{ nm}$). Sur un écran situé à 2 m du cheveu la tache centrale de diffraction s'étale sur 4 cm.

- A) L'épaisseur du cheveu est de $30 \mu\text{m}$.
- B) L'épaisseur du cheveu est de $60 \mu\text{m}$.
- C) Les 2 premières taches satellites à droite de la tache centrale sont espacées de 4 cm.
- C) Les 2 premières taches satellites à droite de la tache centrale sont espacées de 2 cm.
- E) Aucune des propositions A-D n'est correctes.

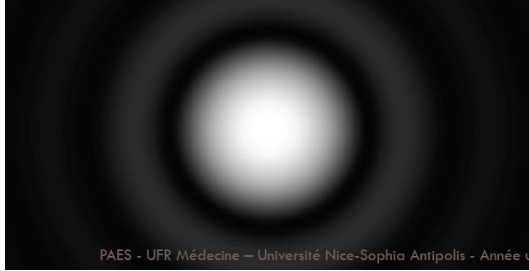
Réponses : B,D

- A) $b = 2\lambda D/L = 2 \times 600 \cdot 10^{-9} \times 2 / 4 \cdot 10^{-2} = 60 \mu\text{m}$ FAUX
- B) VRAI
- C) La première tache est située à λ/b , la deuxième à $2\lambda/b$: Elles sont donc séparées d'une distance $\lambda/b = 2 \text{ cm}$ car la tâche centrale vaut $2\lambda/b = 4 \text{ cm}$. FAUX
- D) VRAI
- E) FAUX

4. Diffraction par une ouverture circulaire

C'est plus intéressant car c'est le cas que l'on rencontre le plus souvent dans les applications.

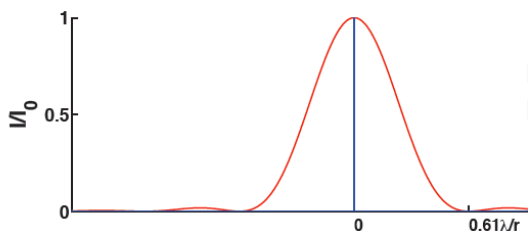
La tâche de diffraction possède une **symétrie circulaire**.



C'est ce qu'on appelle la « **tâche d'Airy** ».

La fonction mathématique associée (*c'est-à-dire qui représente l'intensité diffractée*) ressemble au sinus cardinal au carré qualitativement (tâche centrale avec un maximum central puis des maxima secondaires beaucoup plus petits et moins lumineux) mais non quantitativement. C'est une fonction que l'on appelle fonction de Bessel. **Elle n'est fonction que du rayon r de l'ouverture.**

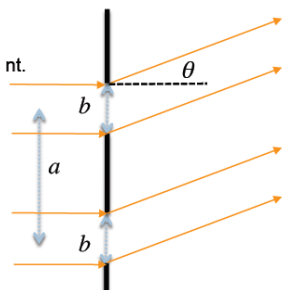
La première annulation de la fonction (maxima d'intensité) se fait pour **$\sin \theta = 0,61\lambda/r$** (*Je précise car c'est pas forcément évident que la première annulation de la fonction correspond à la demi-largeur de la tâche centrale → Voir schéma*)



5. Diffraction par deux fentes

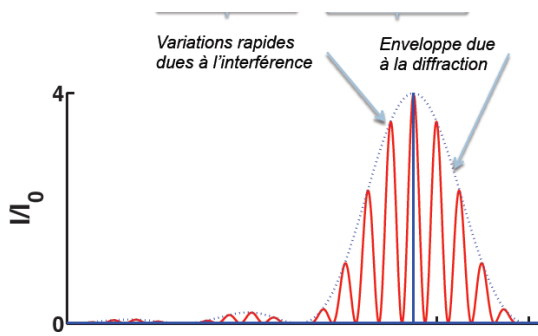
Cet exemple nous permet de comprendre ce qui se passe quand il y a à la fois des interférences et une diffraction.

On considère deux fentes de largeur b séparées par une distance a (sépare le centre des deux ouvertures). Il s'agit donc du **système des fentes de Young**.



Chaque fente diffracte l'onde incidente et les deux ondes diffractées interfèrent. **Cela revient en fait simplement à multiplier l'intensité que l'on aurait avec une seule ouverture par la modulation caractéristique de l'interférence :**

$$I_{\text{Young}} = 4I_0 \underbrace{\cos^2\left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}\right)}_{\text{Variations rapides dues à l'interférence}} \underbrace{\text{sinc}^2\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}\right)}_{\text{Enveloppe due à la diffraction}}$$



La notion de diffraction est liée au pouvoir de résolution optique de l'instrument.

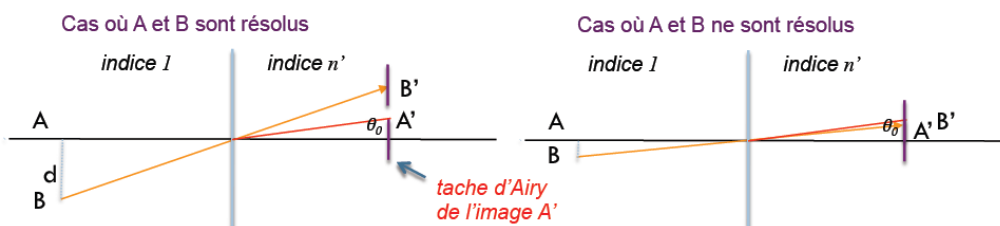
D. Pouvoir de résolution optique

1. Pouvoir de résolution des instruments optiques

On va retrouver une des raisons pour lesquelles construire un microscope le plus performant possible sera toujours limité par les phénomènes de diffraction. En effet, quand on a un instrument optique donné, il y a toujours une ouverture fine de rayon r . Cela veut dire qu'une source lumineuse sur un microscope va traverser l'ouverture et ensuite se diffracter en donnant une tâche d'Airy d'extension angulaire $2\theta_0$. L'extension de cette tâche suit la formule que l'on a déjà vue précédemment : $\sin\theta_0 = 0,61\lambda/n'r$ avec n' l'indice de réfraction de l'instrument optique. Cela nous a donc permis de trouver la tâche d'Airy d'un objet A.

Si on a un objet B à distance d de A, alors son image ne sera plus un point mais également une tâche d'Airy d'extension identique (schéma 1 ci-dessous). On peut voir que A' et B' sont bien distincts, cela signifie que l'on peut bien distinguer deux objets A et B. On peut dire que **A et B sont résolus**.

Si A et B se rapprochent (schéma 2), alors les deux tâches vont se confondre et l'on aura une situation où l'on ne verra plus qu'une seule tâche d'Airy A'B'. On peut alors dire dans ce cas que **A et B ne sont pas résolus**.



Comment peut-on définir la distance minimale d à laquelle on peut rapprocher A et B pour que A et B soient encore résolus ? C'est le **critère de Rayleigh** qui nous apporte la réponse : Les objets A et B sont résolus si la position du maximum d'intensité de l'image B' tombe (au plus près) au premier zéro de l'intensité de l'image de A'. **Donc la distance angulaire entre les centres des images doit valoir au moins l'angle θ_0 .**

On définit le **pouvoir séparateur d_{min}** d'un instrument optique comme l'écart minimal entre deux objets ponctuels permettant encore de les distinguer. On note D la distance entre l'objet AB et l'ouverture du microscope. Le critère de Rayleigh implique alors, après avoir fait l'approximation selon laquelle $\sin\theta_0 = d_{min}/D$ que **la distance minimale d_{min} à laquelle on peut rapprocher deux objets A et B est donc égale à $0,61\lambda D/n'r$** (r l'ouverture du microscope).

Exemple : On suppose que l'ouverture d'un microscope est égale à 1cm et que l'objet est placé à 1cm de l'objectif. On donne $n'=1,5$ et $\lambda=0,47\mu\text{m}$ (=bleu). On calcule $d_{min}=0,2\mu\text{m}$.

Les instruments optiques, même les plus performants, ne peuvent révéler des détails de dimension inférieure à quelques dizaines de micromètres. Au niveau de la biologie intracellulaire, cela a une conséquence relativement grande car on se heurte à une impossibilité de visualiser des organelles, des virus, l'ADN, des protéines...

On cherche donc, dans des domaines tels que la biocell, à réduire le pouvoir séparateur d_{min} . Comment faire ? Il faut **réduire la longueur d'onde λ** , par exemple en préférant utiliser des ondes électromagnétiques plutôt que des ondes visibles (elles ont une longueur d'onde plus petite). λ peut également être diminué de façon significative si **on remplace les ondes lumineuses par des ondes de matière**. En effet, des particules (telles que les électrons) de quantité de mouvement p se comportent comme des ondes de longueur d'onde $\lambda = h/p$ avec $p = mv$ et h la constante de Planck (rappel de mécanique quantique).

Par exemple, si un électron est accéléré sous une différence de potentiel de 3kV, il acquiert une énergie $E_c = 1/2 mv^2 = 3 \text{ keV}$. Or, on sait que l'on peut relier E_c et λ selon la formule **$E_c = p^2/2m = h^2/(2m\lambda^2)$** . Par le calcul, on trouve $\lambda = 0,022 \text{ nm}$ (pour les détails du calcul, diapo 30). Par rapport aux ondes lumineuses où λ vaut environ 400nm, on s'aperçoit qu'on gagne un facteur supérieur à 10000.

Une microscopie qui serait basée sur des électrons qui seraient diffractés par des objets serait donc extrêmement puissante. Cela a ensuite donné lieu à la microscopie électronique. En concevant des champs électromagnétiques adéquats, il est possible de dévier les trajectoires des électrons afin de créer un « indice de réfraction » analogue à celui qui dévie la trajectoire des photons dans un instrument optique. Il est ensuite possible d'élaborer des « lentilles » électrostatiques et magnétiques, capables de jouer les rôles d'objectif et d'oculaire dans un microscope électronique. Plusieurs difficultés techniques viennent compliquer la mise en œuvre de cette idée. En pratique, on peut tout de même atteindre un pouvoir séparateur inférieur à un Angström.

2. Pouvoir de résolution de l'œil

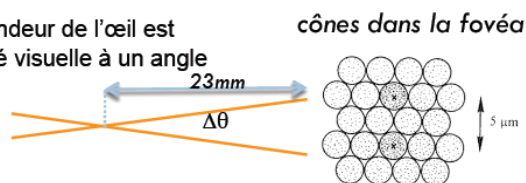
Si on considère l'œil comme un instrument optique, alors son pouvoir de résolution est également limité par la diffraction. On applique donc la formule de la résolution angulaire minimale **$\theta_0 = \lambda/n'r$** . En prenant pour valeurs 1,35 pour n' , 1,5mm pour r et $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$, on trouve $\theta_0 = 0,15 \text{ mr}$ (=milliradians). La moyenne des individus possède une résolution angulaire minimale comprise entre **0,3 et 0,5mr**. L'acuité visuelle de 10/10 est donnée à une personne ayant $\theta_0 = 0,3 \text{ mr}$.

Remarque : $\theta_0 = 0,3 \text{ mr}$ correspond au fait de pouvoir distinguer à 10m deux points séparés de 3mm.

Les limites de l'acuité visuelle sont probablement plus imposées par la structure cellulaire de la rétine que par la diffraction. En effet, pour être distinctement perçus, deux rayons doivent toucher deux cônes (=récepteurs lumineux) distincts et séparés au moins par une cellule de la rétine.

Si le diamètre d'un cône est de $2.3 \mu\text{m}$ et que la profondeur de l'œil est de 23mm, cette contrainte correspond à limiter l'acuité visuelle à un angle maximum de résolution de:

$$\Delta\theta = 2 \times 2.3 \cdot 10^{-6} / (23 \cdot 10^{-3}) = 0.2 \text{ mr}$$



Il existe donc tout de même une bonne adaptation de la structure de l'œil par rapport à la limite d'acuité imposée par la diffraction.

Et voilà, c'est la fin de ma dernière ronéo, j'espère qu'elles vous auront plu ! Dédicasse à Didou, Léonard, Juju, Luc, Lucas, Léa, Alexia et Franck ! Bon courage à tous, ne lâchez pas maintenant malgré les moments de découragement ! Et continuez (Commencez ?) à travailler la biostat surtout !! ☺