Correction DM Matrices QCMs Pr. Maignant

1/	D	**2/**	D	**3/**	E	**4/**	AC	**5/**	BD
6/	B	**7/**	C	**8/**	CD	**9/**	AD	**10/**	BC
11/	BD	**12/**	BCD	**13/**	C	**14/**	ABD	**15/**	ACD
16/	CD	**17/**	ABC	**18/**	AD	**19/**	E	**20/**	CD
21/	AB	**22/**	ABD	**23/**	BCD				

QCM 1 : D

A) Faux : En général, chez les matrices le produit de AB et le produit de BA sont différents, ici on ne connait pas les valeurs des matrices A et B donc on ne peut pas s'avancer
B) Faux : Idem item A. Rappel : Si AB=BA, on dit que les matrices commutent. En général, deux matrices carrées d'ordre n ne commutent pas
C) Faux : On manque d'informations pour savoir si B est l'inverse de A, il nous faudrait les valeurs des matrices A et B et vérifier que AB = I_n
D) Vrai : Nous avons affaire à des matrices carrées de même ordre donc elles ont le même nombre de lignes et de colonnes. Ainsi, on est sûr que leur produit existe
E) Faux

QCM 2 : D

A) Faux : En général deux matrices ne commutent pas, il nous manque les valeurs pour conclure cela
B) Faux : Le produit de deux matrices rectangulaires peut ne pas exister
C) Faux : Pour que le produit AB existe, il faut que le nombre de lignes de B soit égal au nombre de colonne de A
D) Vrai
E) Faux

QCM 3 : E

A) Faux : En général, les matrices ne commutent pas, il nous manque les valeurs pour conclure cela
B) Faux : Seule la transposée d'une matrice carrée aura les mêmes dimensions. Quand on fait la transposée d'une matrice, on passe l'information sous forme de ligne en colonne et inversement. Ici on a une matrice rectangulaire donc le nombre de colonne et le nombre de ligne de la transposée seront différents
C) Faux : On ne peut que calculer les puissances d'une matrice carrée
D) Faux : A est une matrice rectangulaire, on ne peut calculer ses puissances
E) Vrai

QCM 4 : AC

A) Vrai : La transposée d'une matrice existe toujours **+++**
B) Faux : On manque de données
C) Vrai : C'est la définition même d'une matrice nilpotente d'ordre 3
D) Faux : Il nous manque les valeurs de A. Il faudrait ensuite calculer le déterminant de A et montrer qu'il est différent de 0
E) Faux

QCM 5 : BD

A) Faux : voir B, il faut que $\det(A) \neq 0$
B) Vrai
C) Faux
D) Vrai : C'est la définition, si A inversible, alors il existe un inverse A^{-1} tel que AA^{-1}= I, la matrice identité
E) Faux

QCM 6 : B

A) Faux : $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$
B) Vrai : Ça existe encore les identités remarquables ? Ici c'est à retenir, car les matrices A et B ne commutent pas forcément
C) Faux : En général, les A et B ne commutent pas, il nous manque leurs valeurs pour conclure cela.
D) Faux : Aucune raison particulière pour que la matrice A soit l'inverse de la matrice B
E) Faux

<u>QCM 7</u> : C

A) <u>Faux</u> : Leur produit peut ne pas exister : le produit de A et B existe seulement si B possède n lignes (item C)
B) <u>Faux</u> : Encore une fois : en général les matrices A et B ne commutent pas (manque d'info) : vous allez le retenir cela ahah
C) <u>Vrai</u> : Le nombre de lignes de B doit être égal au nombre de colonnes de A
D) <u>Faux</u> : Ça on ne peut pas le savoir sans plus d'informations
E) <u>Faux</u>

<u>QCM 8</u> : CD

A) Faux : Le produit de A et B n'existe pas toujours, le produit existe seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.
B) <u>Faux</u>
C) <u>Vrai</u> : Il faut que ça soit compris
D) <u>Vrai</u>
E) <u>Faux</u>

<u>QCM 9</u> : AD

A) <u>Vrai</u> : Le produit de deux matrices carrées d'ordre n existe toujours **+++**
B) <u>Faux</u>
C) <u>Faux</u> : On peut avoir un produit de matrices nul sans que l'une des matrices soit nulle, on peut y arriver avec des matrices extrêmement creuses (autrement dit avec beaucoup de 0).
D) <u>Vrai</u> : Définition **+++**
E) Faux

<u>QCM 10</u> : BC

A) <u>Faux</u> : Deux matrices ne commutent pas forcément, ce n'est pas parce que AB=I_n que BA=I_n
B) <u>Vrai</u> : Si AB = I_n alors B est l'inverse de A
C) <u>Vrai</u> : L'inverse de AB est B^{-1} A^{-1} : c'est à retenir. En effet, AB*$B^{-1}A^{-1}$ = A*I_n*A^{-1} = = AA^{-1} = I_n
D) <u>Faux</u>
E) <u>Faux</u>

<u>QCM 11</u> : BD

A) <u>Faux</u> : L'inverse d'une matrice n'existe pas toujours, quand c'est le cas, il est donné par la réponse B
B) <u>Vrai</u>
C) <u>Faux</u> : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
D) <u>Vrai</u> : Pour toute matrice carrée, si A^{-1} existe, alors A et A^{-1} commutent toujours.
E) <u>Faux</u>

<u>QCM 12</u> : BCD

A) <u>Faux</u> : $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$
B) <u>Vrai</u> : $A^2 - 2A + I = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = 2A$
C) <u>Vrai</u> : $A^2 - 4A + I = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$
D) <u>Vrai</u> : Ici on part d'un résultat qu'on a déjà trouvé à savoir $A^2 - 4A + I = 0$. On a : $A^2 - 4A + I = A(A - 4I) + I$.

$$\begin{aligned} A(A-4I) + I &= 0 \\ A(A-4I) &= -I \\ A - 4I &= -A^{-1} \\ 4I - A &= A^{-1} \end{aligned}$$

Ce passage n'est pas forcément évident, si besoin faites un post sur le forum, j'expliquerai plus en détail. Aussi je vois mal le prof vous demander une telle démonstration donc pas d'inquiétude ;)
E) <u>Faux</u>

<u>QCM 13</u> : C

A) <u>Faux</u> : B est nilpotente d'ordre 2 car $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
B) <u>Faux</u> : det (B) = 0
C) <u>Vrai</u>
D) <u>Faux</u> : c'est une matrice nilpotente d'ordre 2 ! au-delà ce sera la matrice nulle
E) <u>Faux</u>

<u>QCM 14</u> : ABD

A) <u>Vrai</u> : A est une matrice diagonale donc elle est inversible
B) <u>Vrai</u> : Oui c'est du cours, toute puissance de A est diagonale car A diagonale
C) <u>Faux</u> : deux coefficients ont été inversé, on devrait avoir $\begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$
D) <u>Vrai</u> : A et aussi A^{-1} commutent avec n'importe quelle de ses puissances
E) <u>Faux</u>

<u>QCM 15</u> : ACD

A) <u>Vrai</u> : on trouve la matrice identité d'ordre 3
B) <u>Faux</u> : comme $A^2 = I$, alors A a pour inverse elle-même
C) <u>Vrai</u> : c'est ce qu'on vient de voir (item B)
D) <u>Vrai</u> : Un grand nombre de ses coefficients sont nuls
E) <u>Faux</u>

<u>QCM 16</u> : CD

A) <u>Faux</u> : pour le prof, la matrice de passage de A à B est telle que **$APA^{-1}=B$**. On cherche donc les valeurs de la matrice P dite de passage :

$$\begin{aligned} APA^{-1}A &= BA \quad (on\ multiplie\ par\ A\ de\ chaque\ côté : attention\ l'ordre\ importe) \\ AP &= BA \\ A^{-1}AP &= A^{-1}BA \quad (on\ multiplie\ par\ A^{-1}\ de\ chaque\ côté : attention\ l'ordre\ importe) \\ P &= A^{-1}BA \end{aligned}$$

Encore une fois la démo est pas forcément évidente et pas donnée par le prof, je le vois mal vous donner ça à l'examen. Pour trouver P vous déroulez et trouvez : $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Tous ses coefficients ne sont pas positifs.

Bon allez j'ai changé d'avis, je vous mets le détail :

$$P = A^{-1}BA = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 8 & 20/3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 \\ 2 & 5/3 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Mon avis : tout ça est un peu long pour tomber à l'examen.

B) <u>Faux</u> : on trouve un 1 et un 5.
C) <u>Vrai</u> : En partant de la formule de départ on tombe dessus
D) <u>Vrai</u> : En partant de la formule de départ on tombe dessus
E) <u>Faux</u>

<u>QCM 17</u> : ABC

A) <u>Vrai</u> : On calcule les matrices $A{}^tA$ et ${}^tAA$, on obtient les valeurs suivantes :
Avec ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on trouve $A\ {}^tA = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$ et ${}^tAA = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$
B) <u>Vrai</u> : Si $A\ {}^tA = {}^tAA$ alors b=c et dans ce cas, A et sa transposée sont identiques
C) <u>Vrai</u> : la transposée d'une matrice inversible est toujours inversible
D) <u>Faux</u>
E) <u>Faux</u>

<u>QCM 18</u> : AD

A) <u>Vrai</u> : on trouve la matrice unité (=identité) d'ordre 2
B) <u>Faux</u> : A ne peut pas être inversible car ça n'est pas une matrice carrée
C) <u>Faux</u> : BA est une matrice carrée d'ordre 3 alors que AB est d'ordre 2
D) <u>Vrai</u> : $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$
E) <u>Faux</u>

<u>QCM 19</u> : E

A) <u>Faux</u> : on a $AB = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. On a AB inversible ($\det(AB) \neq 0$) mais pas BA ($\det(BA) = 0$).
B) <u>Faux</u> : dimension 2x2 et 3x3 donc non
C) <u>Faux</u> : A et B ne sont pas des matrices carrées donc elles ne sont pas inversibles par définition
D) <u>Faux</u> : certainement pas
E) <u>Vrai</u>

<u>QCM 20</u> : CD

A) <u>Faux</u> : ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \neq A$

B) <u>Faux</u> : ${}^tB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq B$

C) <u>Vrai</u> : La matrice B est antisymétrique car ${}^tB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -B$

D) <u>Vrai</u> : Autre écriture de la définition d'une matrice antisymétrique : ${}^tA = -A$

E) <u>Faux</u>

<u>QCM 21</u> : AB

A) <u>Vrai</u> : Une matrice est dite symétrique si sa transposée est égale à elle-même
B) <u>Vrai</u> : Une matrice est dite antisymétrique si sa transposée est égale à son opposée
C) <u>Faux</u> : Le prof prend l'exemple de la matrice carrée d'ordre 2 suivante : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dont le déterminant vaut 0, c'est une matrice symétrique mais elle n'est pas inversible.
D) <u>Faux</u> : Même raisonnement
E) <u>Faux</u>

<u>QCM 22</u> : ABD

A) <u>Vrai</u> : Si A possède deux lignes et trois colonnes alors ${}^tA$ possède trois lignes et deux colonnes, le produit de ${}^tAA$ existe et a pour dimension 3x3 et est symétrique. On obtient une matrice carrée d'ordre p, ici p=3
B) <u>Vrai</u> : Par définition
C) <u>Faux</u> : on a ${}^tAA$ qui donne une matrice carrée d'ordre 3 et $A{}^tA$ qui donne une matrice carrée d'ordre 2
D) <u>Vrai</u> :
E) <u>Faux</u>

<u>QCM 23</u> : BCD

A) <u>Faux</u> : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2I - B$

B) <u>Vrai</u> : $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2A - B$

C) <u>Vrai</u> : on a ${}^tA = A$ donc ${}^tAA = A^2$ et symétrique

D) <u>Vrai</u> : On cherche le déterminant de A, s'il est différent de 0, alors la matrice A est inversible :

$$\det(A) = 1 \times det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 0 \times \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + (-1) \times \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \times (-1) + (-1) \times \big(-(-1)\big) = -2 \neq 0$$

E) <u>Faux</u>

Arrivés au bout ? Bravo !
Bon courage pour la suite !

À mes filleules, accrochez-vous, je crois en vous