Probabilités élémentaires et dénombrements

Introduction

Une **population** est un ensemble d'objets, d'êtres vivants (population réelle) ou d'objets abstraits (population fictive) de même nature. *Ex : tous les étudiants de licence de Nice*

Cet ensemble est généralement très grand voire infini. Une étude exhaustive n'est donc pas faisable. On étudie alors les individus d'un sous ensemble : un **échantillon**. C'est sur cet échantillon que sont recueillies les caractéristiques morphologiques, physiologique, …

Travailler sur un extrait de la population a pour conséquences :
- D'observer partiellement la caractéristique : peut-on extrapoler à la population entière ?
- D'avoir des individus différents à chaque fois que l'on choisit un nouvel échantillon : les mesures seront donc différentes à chaque échantillon.

La **théorie des probabilités** permet de modéliser les phénomènes où le hasard intervient (jeu de hasard). Cette théorie permet le calcul de cette « extrapolation » de la caractéristique observée sur l'individu. C'est possible seulement si la sélection des individus de l'échantillon à partir de la population a été effectuée au hasard (randomisation).

Ensembles, éléments

Un **ensemble** est une liste ou collection d'objets définis. *Ex : Les étudiants en LAS*

Un **élément de l'ensemble** est un objet appartenant à l'ensemble. *Ex : un étudiant particulier de LAS*

Un ensemble peut se définir en **extension**/listé. *Ex : A = {1, 6, 9, 12}*
Il peut aussi se définir en **compréhension**/critère. *Ex : A = {les multiples de 3}*

Notations :

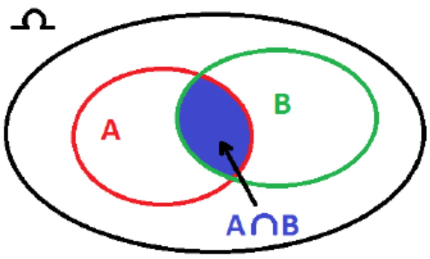
$p \in A$: p appartient à l'ensemble A. *Ex : A = {1, 2, 3, 4} et p = 2 alors* $p \in A$

$B \subset A$: B est inclus dans A, B est une partie de l'ensemble A. *Ex : B = {1, 3} alors* $B \subset A$

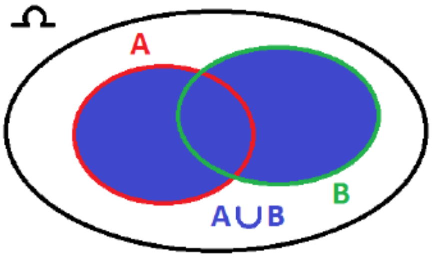
$\emptyset$: l'ensemble vide
Ω : l'ensemble universel aussi noté E

Opérations :

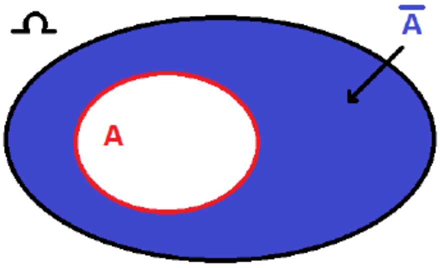
L'**intersection** entre 2 ensembles A et B : $A \cap B$ sont les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B
Si $A \cap B = \emptyset$: il n'y a pas de solution, les ensembles sont disjoints.
Ex : obtenir face et obtenir pile en 1 seul lancer



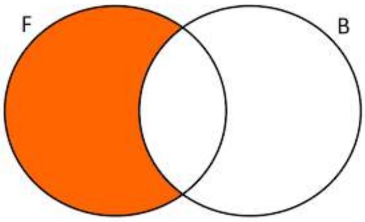
La **réunion** entre 2 ensembles A et B : $A \cup B$ sont les éléments qui appartiennent soit à A, soit à B soit aux 2.



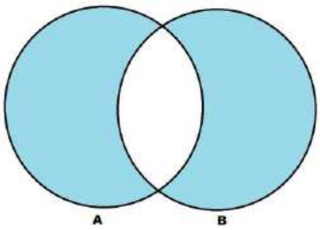
Le **complémentaire** d'un ensemble A : CA représente tout ce qui n'appartient pas à A.



La **différence** entre A et B ou complémentaire de B relatif à A : A-B est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B



La **différence symétrique** de A et B : $A \Delta B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B mais pas à $A \cap B$. Elle correspond au lien logique ou exclusif. $A \Delta B = A \cup B - A \cap B$



Opérations importantes à comprendre et connaître :

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup \varnothing = A \qquad A \cap \Omega = A$$
$$A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$$
$$A \cup \complement A = \Omega \qquad A \cap \complement A = \varnothing$$
$$\complement\complement A = A \qquad \complement\Omega = \varnothing, \complement\varnothing = \Omega$$
$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B \qquad \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$$

Ensembles :

Les différents types d'ensembles :

Ensembles finis	Ensembles infinis	
Ensemble nul ou contenant un nombre fini d'éléments *Ex : {2, 8, 12}*	**Dénombrables**	**Indénombrables**
	Chaque élément peut être compté *Ex : les entiers naturels $\mathbb{N}$: {1, 2, 3,…}*	On ne peut pas compter tous les éléments *Ex : l'ensemble des réels $\mathbb{R}$: {1 ; 1,1 ; 1,11 ; 1,111 ; …}*

Ensemble produit :
L'ensemble produit des 2 ensembles A et B est l'ensemble des couples ordonnés (a ; b) avec $a \in A$ et $b \in B$
Pour calculer le nombre de couples possibles d'un ensemble produit on fait :

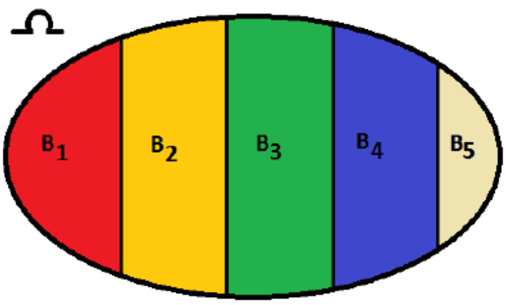
Card (A) x Card (B)

Avec Card (A) le nombre d'éléments de l'ensemble A
Ex : A = { 1, 2, 3} et B = {lundi, mardi} les différents couples sont {(1, lundi); (1, mardi); (2, lundi); (2, mardi); (3, lundi); (3, mardi) : il y a 6 couples différents et Card (A) x Card (B) = 3 x 2 = 6

Si il y a plus que 2 ensembles, les couples deviennent des n-uplet et le nombre de n-uplet réalisables sont : Card (A) x Card (B) x Card (C) x …

Famille d'ensemble :
La famille des parties de A est l'ensemble de tous les sous-ensembles de A.
Un ensemble à p élément a 2^p parties/sous-ensembles.
Ex : A = {1, 2, 3}, {1}, {1, 3} sont des sous-ensembles de A

La **partition** est la division de l'ensemble A en sous-ensembles disjoints dont la réunion forme A
Ex : A = {1, 2, 3} B = {1} et C = {2, 3} alors B et C forment une partition de A



Dénombrements

Les dénombrements permettent de calculer le nombre de possibilités de tirage dans des situations de probabilité. Il existe différentes formules en fonction des différentes situations que l'on peut rencontrer.

I. La p-liste avec remise :

Elle est utilisée pour des tirages ordonnés avec remise. Le tirage est donc toujours effectué sur le même ensemble (car si on prend un élément on le remet, ce qui ne change pas l'ensemble de départ).

La formule utilisée est $\text{Card}(E)^p$ avec Card (E) le nombre d'éléments de E et p le nombre de tirages

Ex : On cherche combien de mots de 3 lettres on peut faire avec les 5 premières lettres de l'alphabet.
Ici Card (E) = 5 et p = 3 on peut donc faire 5^3=125 mots (par exemple aaa, aba, aeb, … et l'ordre est important aba est différent de baa)

II. L'arrangement avec répétition :

Similaire à la p liste avec remise, lors de tirages ordonnés avec remise

La formule utilisée est n^x avec n le nombre d'éléments de l'ensemble et x le nombre de tirages : c'est donc exactement la même formule dans la même situation

Ex : On a une urne de 6 boules numérotées et on en tire 7 en les reposant à chaque fois. Il y a donc 6^7 tirages possibles.

III. L'arrangement de n éléments pris p à p :

Il est utilisé pour des tirages ordonnés sans remise. À chaque nouveau tirage on a un élément en moins dans notre ensemble (celui que l'on vient de tirer)

La formule est l'arrangement de p éléments parmi n : $A_n^p = \frac{n\,!}{(n-p)\,!}$ avec n le nombre d'éléments de l'ensemble et p le nombre de tirages.

Explication du n! : « n factoriel ». C'est la multiplication du nombre n avec tous les nombres qui lui sont plus petits. Par exemple 3! = 3x2x1 = 6 et 5! = 5x4x3x2x1 = 120. <u>Attention</u> : 0 ! = 1

Exemple : On a une urne avec 6 boules numérotées et on en prend 3 une à une. Combien de tirages différents peut-on avoir ? Ici le « une à une » indique que l'ordre est important. Aussi n = 6 et p = 3.
$A_6^3 = \frac{6\,!}{(6-3)\,!} = \frac{6\,!}{3\,!} = \frac{6*5*4*3*2*1}{3*2*1} = 120.$
On peut donc avoir 120 tirages différents

<u>IV. La permutation d'un ensemble fini à n éléments</u> :

Elle est utilisée pour des tirages ordonnés sans remise. C'est un cas particulier de l'arrangement de n éléments pris p à p car ici n=p. En d'autres termes, c'est un tirage ordonné de tous les éléments de l'ensemble.

La formule est **n!** avec n le nombre d'éléments de l'ensemble (logique si p=n alors $\frac{n\,!}{(n-p)\,!}$ = $\frac{n\,!}{(n-n)\,!}$ = n!)

Ex : On a une urne avec 6 boules numérotées et on cherche de combien de manières on peut les ordonner. Ici n = 6 donc n! = 6! = 720. On peut arranger les 6 boules de 720 manières différentes.

<u>V. La permutation avec répétition</u> :

Elle est utilisée pour des tirages ordonnés sans remise. Sa particularité est qu'elle est utilisée lorsque plusieurs éléments de l'ensemble appartiennent à une même catégorie et qu'on ne considère que la catégorie pour l'ordre.

La formule est $\frac{\mathrm{n}\,!}{\mathrm{k1}\,!*\mathrm{k2}\,!*\mathrm{k3}\,!*\ldots}$ avec n le nombre d'éléments et k1, k2, … le nombre d'éléments dans chaque catégorie.

Ex : On a une urne avec 3 boules noires, 2 rouges et 1 blanches. Combien y a-t-il d'ordres de tirage différents en ne prenant en compte que la couleur des boules. $\frac{6\,!}{3\,!*2\,!*1\,!}$ = $\frac{6*5*4*3*2*1}{3*2*1*2*1*1}$ *= 60*

<u>VI. La combinaison de n éléments pris p à p</u> :

Elle est utilisée pour des tirages non ordonnés sans remise (= tirages simultanés)

La formule est $C_n^p = \frac{n\,!}{p\,!*(n-p)\,!}$ avec n le nombre d'éléments de l'ensemble et p le nombre d'éléments tirés.

Ex : On a une urne avec 6 boules numérotées et on en tire 3 simultanément. Combien de tirages différents peut-on obtenir ? Ici n = 6 et p = 3. $C_6^3 = \frac{6\,!}{3\,!*(6-3)\,!} = \frac{6*5*4*3*2}{3*2*3*2}$ *= 20.*
Avec le tirage simultané le tirage 1,2,3 est le même que 1,3,2 que 3,2,1, …

Tableau récap de tout ce qu'on vient de voir :

Avec remise		Sans remise			
Ordonné		Ordonné			Non ordonné
p-liste avec remise	Arrangements avec répétition	Arrangements de n éléments pris p à p	Permutation d'un ensemble fini à n éléments	Permutations avec répétition	Combinaisons de n éléments pris p à p parties d'un ensemble
On prend 1 élément dans E, on le remet et on répète p fois	On prend 1 élément dans n, on le remet et on répète p fois	On prend SUCCESSIVEMENT (=les uns après les autres) p éléments parmi n sans remettre	On prend les éléments 1 à 1 sans les remettre jusqu'à épuisement p = n	On prend les éléments 1 à 1 jusqu'à épuisement en ne tenant compte que des catégories	On prend SIMULTANEMENT (=tous en même temps) p éléments parmi n
$(\text{Card } E)^p$	n^p	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$n!$	$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_x!}$	$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$

Éléments de probabilité

Introduction :

Il existe 2 types de phénomènes :
- Les phénomènes **déterministes**, dont l'issue est prévisible (les phénomènes physiques)
- Les phénomènes **aléatoires**, dont l'issue n'est pas prévisible (comme un lancer de dé)

Une **expérience aléatoire** (ou épreuve) est une expérience dont le résultat n'est pas prévisible, c'est donc un phénomène aléatoire.

En probabilité, on travaille sur un ensemble fondamental (noté Ω) qui représente l'ensemble de tous les résultats possibles.

Un **événement** quant à lui est un sous-ensemble de l'ensemble fondamental.

Ex : l'ensemble fondamental peut être les résultats d'un lancer de dé (Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}) et l'événement peut être obtenir un nombre pair ({2 ; 4 ; 6})

Il existe plusieurs types d'événements :
- L'événement **élémentaire** (ω) : constitué d'un seul résultat de l'ensemble.
Ex : « Obtenir un 2 » à un lancer de dé

- L'événement **impossible** ou ensemble vide (Ø) : ne contient aucun des résultats possibles.
Ex : « Obtenir un 7 » à un lancer de dé

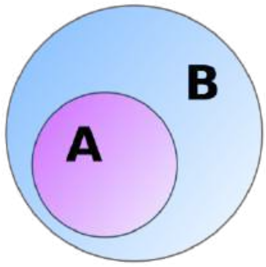
- L'événement **certain** : l'ensemble contient tous les résultats possibles.
Ex : « obtenir un chiffre » à un lancer de dé

Probabilités :

Une probabilité associe à un événement un nombre allant de 0 à 1, elle permet de mesurer la chance de réalisation de l'événement en question.

Quelques règles à connaître :

- $P(\emptyset) = 0$: l'événement impossible ne peut pas se produire
- $P(\Omega) = 1$
- $P(CA) = 1 - P(A)$
- Si $A \subset B$ (est inclus dans B) alors $P(A) \leq P(B)$ (car A est une partie de B)
- Si $P(A \cap B) = 0$ alors ils s'excluent mutuellement et A et B sont dits incompatibles.



Théorème des probabilités totales :

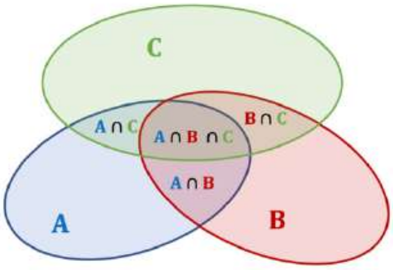
$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Si A et B sont incompatibles, $P(A \cap B) = 0$ donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Propriété d'additivité forte ou formule de Poincaré (d'inclusion-exclusion ou de crible) :

$$\boxed{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)}$$

Cette formule est utilisable lorsque l'on veut calculer la réunion entre plusieurs événements. Elle est généralisable quel que soit le nombre d'événement (ici 3).



Pour obtenir cette formule on additionne chaque événement ce qui compte 2 fois chaque intersection (et 3 fois celle du milieu). On enlève donc chaque intersection 1 fois mais ça laisse un trou au milieu qu'il faut donc combler.

Équiprobabilité :

Lors d'une situation d'équiprobabilité, tous les événements élémentaires ont la même chance de se produire.

La probabilité d'un événement A est $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$ avec Card (A) le nombre d'élément de l'événement (de cas favorables) et Card (Ω) le nombre d'élément de l'univers (de cas possibles)

Ex : Dans un jeu de 52 cartes quelle est la probabilité de tirer un valet :
L'événement A est « tirer un valet » : Card (A) = 4 et Card (Ω) = 52. $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

Probabilité et ensembles :

- Pour un ensemble fini, la probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1. De plus, la somme des probabilités de tous les événements élémentaires est toujours égale à 1.

Ex : considérons un dé biaisé tel que $P(1) = \frac{1}{3}$ $P(2) = \frac{1}{6}$ $P(3) = \frac{1}{12}$ $P(4) = \frac{1}{12}$ $P(5) = \frac{1}{4}$ $P(6) = ?$
Un dé correspond à un ensemble fini donc $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$
$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + P(6) = 1$. $P(6) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$

- Pour un ensemble infini (pas très important mais je le mets quand même) : Pour un ensemble dénombrable, chaque élément a_x est associé à une probabilité avec $p_x \geq 0$ et la somme de tous les $p_x = 1$
La probabilité d'un événement est la somme de la probabilité de tous ses éléments.

Ex : L'expérience consiste à jeter une pièce jusqu'à obtenir un résultat pile : c'est un espace infini dénombrable. On peut construire un espace probabilisé en choisissant : $p_1 = \frac{1}{2}$; $p_2 = \frac{1}{4}$; … ; $p_n = \frac{1}{2^n}$; $p_\infty = 0$

Et voilà c'est fini pour ce cours. C'est un cours assez logique
Grosse dédi à mes cotuts Juliectomie, Eva'nouir, Sap1ens et Camilyatomic.
Dédi à nos vieux Exodia, glyc'olive, juj' et Camileon
Dédi à Amandine sans qui je n'aurais jamais finis mes 2 P1
Dédi à Florian et Oscar mes sauveurs de maths
Et enfin dédi à vous qui commencez cette année difficile, vous allez tout déchirer