Probabilités conditionnelles, théorème de Bayes et indépendance en probabilités

I- Probabilités conditionnelles

Introduction

Définition : Une probabilité conditionnelle s'intéresse à la probabilité de réalisation d'un événement A à **condition** qu'un autre événement B ait déjà été réalisé.
Notation : $P(A|B) = P_B(A)$ ↬ Probabilité de A sachant B réalisé.

Attention : $P(A|B) \neq P(A \cap B)$ ↬ Les probabilités conditionnelles sont à distinguer des probabilités d'une intersection !

Formules de la probabilité conditionnelle

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Aide :

Pour retenir ce qui se trouve sous le trait de fraction dans la formule (donc soit P(A) ou P(B)) je m'aidais de ce qui se trouvait avant le signe égal. Si le A est après la barre : P(B|A) ou s'il est plus bas que le B : $P_A(B)$, on a P(A) en dessous de la fraction 😉.

Théorème de la multiplication

Théorème: $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B|A) \times P(A) = P(A|B) \times P(B)$

$$P(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_{n-1})$$

II- Diagramme en arbre

1. Selon le **théorème de la multiplication** la probabilité d'un chemin est le produit de chaque branche du chemin !
2. Les chemins s'excluent mutuellement.
3. La somme de toutes les probabilités des finalités doit être 1.

III- Formule et théorème de Bayes

Formule de Bayes

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) \times P(B)}{P(A)}$$

Théorème de Bayes

$$P(B) = \frac{P(B|A_n) \times P(A_n)}{P(B|A_1) \times P(A_1) + P(B|A_2) \times P(A_2) + \cdots + P(B|A_n) \times P(A_n)}$$

Probabilités conditionnelles, théorème de Bayes et indépendance en probabilités

IV- Evénements indépendants

Introduction

Définition : Deux événements sont indépendants si P(B∩A) = P(A) x P(B).
Les événements sont indépendants dans la mesure où la probabilité de réalisation de A ne change pas avec la réalisation de B. Soit P(A|B) = P(A) et P(B|A) = P(B) !

Conséquences :

- $\bar{A}$ et B sont indépendants.
- A et $\bar{B}$ sont indépendants.
- $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

Cas de trois événements :

- → Si ils sont indépendants deux à deux
- → Et si $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$
- → Alors ces trois événements sont indépendants !

Indépendance et inclusion

Définition :

A ⊂ B : A est inclus dans B → $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)}$

Conséquences :

Formule de Bayes quand A ⊂ B :

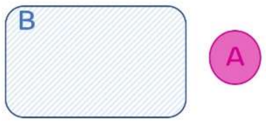
$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}}$$

Formule de Bayes quand B ⊂ A :

$$\boldsymbol{P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)}}$$

⚠ Attention : A et B ne sont PAS indépendants !

Indépendance et exclusion



Définition :

$\boldsymbol{(A \cap B) = \varnothing;\ P(A \cap B) = 0}$: A et B sont exclusifs/disjoints/incompatibles

$$\boldsymbol{P(A|B) = P(B|A) = 0}$$

⚠ Attention : A et B ne sont PAS indépendants !

Incompatibles=exclusifs=disjoints	**Indépendants**
Ne fait PAS intervenir leur probabilité	Liés à leur probabilité
Ne peuvent PAS se produire en même temps	Peuvent se produire en même temps (*la réalisation d'un n'influençant pas l'autre*)
Défini par : P (AUB) = P(A) + P(B) Donne : **P (A∩B) = 0**	P (A∩B) = P(A) x P(B)