Probabilités conditionnelles, théorème de Bayes indépendance en probabilités

I- Définitions de base en probabilités

Ω Ensemble fondamental, l'univers : P(Ω)=1 cela représente 100% des événements, la probabilité est certaine. *Ex : tout l'amphi.*

P(A) : Probabilité de l'événement A. *Ex : Probabilité qu'un étudiant en PACES de Nice aime les gâteaux.*

P(Ā) ou P(ꞔA) : Probabilité de l'événement contraire de A, c'est-à-dire ne pas avoir A. On peut dire aussi que Ā c'est l'univers moins l' événement A. On peut obtenir cette probabilité en faisant P(Ā) = P(Ω) – P(A) = 1 – P(A). *Ex : Probabilité qu'un étudiant en PACES de Nice n'aime pas la Biostat grr (si A est aimer la biostat).*

P(A∩B) = P(B∩A) : Probabilité de A et de B = Probabilité de B et A (c'est pareil 😉) ou probabilité de A inter B (car c'est l'intersection de l'évènement A et B). *Ex : Probabilité qu'un étudiant en PACES de Nice aime les gâteaux et la biostat'* 😍

II- Probabilités conditionnelles

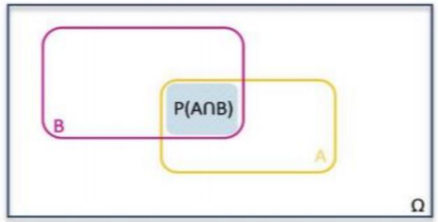
A- Introduction

Définition : Une probabilité conditionnelle s'intéresse à la probabilité de réalisation d'un événement A à condition qu'un autre événement B ait déjà été réalisé.

Remarque : Ainsi on s'intéresse seulement aux évènements A réalisés parmi les événements B réalisés et non plus parmi tout l'univers.

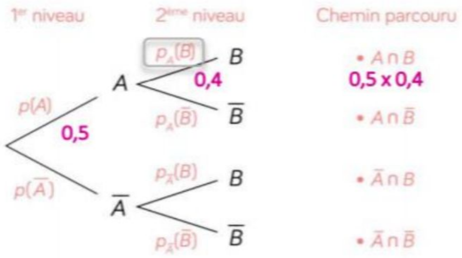
Notation : P(A|B)=PB(A) Probabilité de A sachant B réalisé.

1)



2)

3)



1) P(A∩B) (probabilité d'une intersection) on regarde sur tout l'univers Ω, car on cherche la probabilité d'A ET B sur l'univers.
2) P(A|B) (probabilité conditionnelle) on regarde parmi la population B seulement, car on cherche la probabilité de A PARMI B. On restreint Ω à B.
3) Sur cet arbre on voit que la probabilité conditionnelle est entourée.

B- Formule de la probabilité conditionnelle

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad P(B\,|\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Equivalence de la formule en lettres : *La probabilité qu'un PACES ait perfect la biostat sachant qu'il a assisté à tous les cours est égale au nombre de PACES qui ont perfecté la biostat et assisté à tous les cours sur le nombre de PACES qui ont assisté à tous les cours !*

C- Théorème de la multiplication

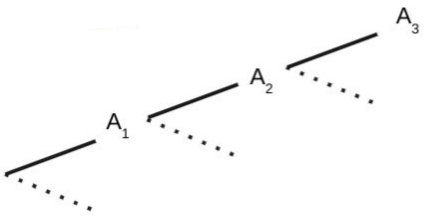
On sait que : P(A|B) = P(A∩B) / P(B) ↔ P(A∩B)=P(A|B)*P(B)
Donc : P(A∩B)=P(B∩A)=P(A|B)*P(B)=P(B|A)*P(A)

Remarque : *En UE4 il est important de savoir le nom du théorème de la formule qu'on utilise* 😉
Remarque bis : *Le théorème peut se généraliser pour plus de deux événements de la manière suivante :*

$$P(A1 \cap A2 \ldots \cap An) = P(A1) * P(A2 \mid A1) * \ldots * P(An \mid A1 \cap A2 \ldots \cap An\text{-}1)$$

Explication avec un schéma :

On a une boite de 10 pâtisseries avec 5 croissants, 2 pains au chocolat et 3 tartes au citron. On veut connaître la probabilité de tirer 3 croissants d'affilé dans une boite neuve. A_1 : tirer un premier croissant / A_2 : tirer un deuxième croissant / A_3 : tirer un troisième croissant.



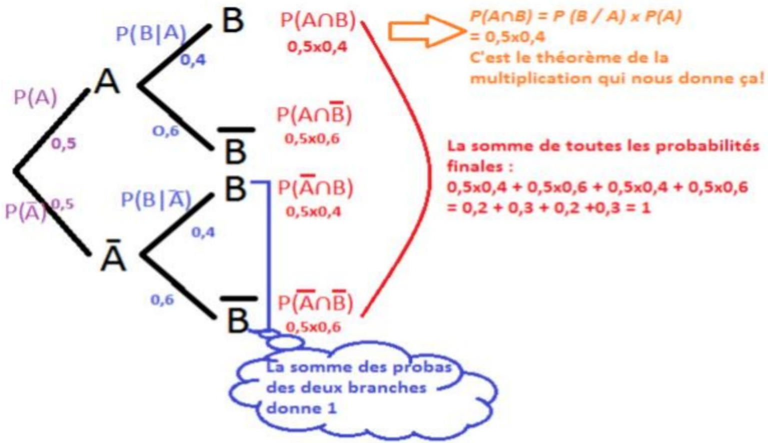
On a donc : $P(A1) = \frac{5}{10}$; $P(A2|A1) = \frac{5-1}{10-1} = \frac{4}{9}$; $P(A3|A1 \cap A2) = \frac{4-1}{9-1} = \frac{3}{8}$

$$P(A1 \cap A2 \cap A3) = P(A1) * P(A2|A1) * P(A3|A1 \cap A2) = \frac{5}{10} * \frac{4}{9} * \frac{3}{8} = \frac{1}{12}$$

Il y a donc 1/12 de chance de tirer 3 croissants d'affilé !

III- Diagramme en arbre

Définition :
Soit une suite finie d'événements quand une expérience dépend du résultat de l'expérience passée ce sont des **probabilités conditionnelles**. On utilise les arbres pour illustrer les situations !
1. Selon le théorème de la multiplication la probabilité d'un chemin est le produit de chaque branche du chemin !
2. Les chemins s'excluent mutuellement.
3. La somme de toutes les probabilités des finalités doit être 1.



Exemple : Si l'événement A considéré est « avoir plus de 20 ans » et l' événement B « être blond ». Le chemin 1 : P(A∩B) est « avoir plus de 20 ans ET être blond ». Le chemin 2 est : P(A∩$\bar{B}$) est « avoir plus de 20 ans ET ne pas être blond », On comprend bien qu'un chemin est exclusif, les deux chemins ne sont pas compatibles !

IV- Formule et théorème de Bayes

A- Formule de Bayes

Définition d'une proba conditionnelle :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ ou } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

+

Théorème de la multiplication :

$$P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(A | B) \times P(B) = P(B | A) \times P(A)$$

=

Formule de Bayes :

$$P(B | A) = \frac{P(A | B) \times P(B)}{P(A)}$$

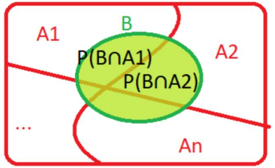
Exemple d'application de la formule de Bayes 😊:
*Dans une classe on a 20 élèves. On a 15 élèves droitiers et le reste des élèves est gaucher. On sait aussi que 12 d'entre eux ont les yeux marrons, 4 ont les yeux bleus et le reste a les yeux verts. Parmi les gauchers, 4 ont les yeux marrons, et celui restant a les yeux bleus. On veut savoir quelle est la **probabilité si on tire un élève au hasard parmi ceux qui ont les yeux marrons de tomber sur un gaucher.***

A : être gaucher / B : avoir les yeux marrons On a : P(A) = 5/20 et P(B) = 12/20 et P(B|A) = 4/5.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) * P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{5} * \frac{5}{20}}{\frac{12}{20}} = \frac{1}{3}$$

B- Théorème de Bayes

Soit un univers Ω formé par un ensemble d'événements de A1 à An. On dit que cet ensemble d'événements de A1 à An constitue une partition de Ω. L'ensemble d'événements de A1 à An dont l'union forme Ω. C'est une illustration du **théorème des probabilités totales :**
P(B) = P(B∩A1) + P(B∩A2) + … + P(B∩An) :



Théorème des probabilités totales :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$$

+

Théorème de la multiplication :

$$P(B \cap A_n) = P(B | A_n) \times P(A_n)$$

=

$$P(B) = P(B | A_1) \times P(A_1) + P(B | A_2) \times P(A_2) + \ldots + P(B | A_n) \times P(A_n)$$

+

Formule de Bayes :

$$P(A_n | B) = \frac{P(B | A_n) \times P(A_n)}{P(B)}$$

=

Théorème de Bayes :

$$P(A_n | B) = \frac{P(B | A_n) \times P(A_n)}{P(B | A_1) \times P(A_1) + P(B | A_2) \times P(A_2) + \ldots + P(B | A_n) \times P(A_n)}$$

V- Evénements indépendants

A- Introduction

Définition : Deux événements sont indépendants si P(B∩A) = P(A) x P(B). Les événements sont indépendants dans la mesure où la probabilité de réalisation de A ne change pas avec la réalisation de B. Soit P(A|B)=P(A) et P(B|A)=P(B) ! Conséquences :

- A et $\bar{B}$ sont indépendants.
- $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.
- $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Cas de trois événements : Soient A, B et C.
S'ils sont indépendants deux à deux (A indépendant de B, A indépendant de C et C indépendant de B). Et si P(A∩B∩C)=P(A)xP(B)xP(C), alors ces trois événements sont indépendants !

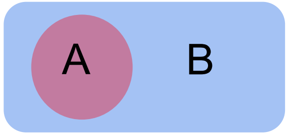
Remarque : La seconde condition n'est pas une conséquence de la première. C'est à-dire que les trois événements peuvent être indépendants deux à deux mais on peut avoir : P(A|B∩C) ≠ P(A) et du coup A, B, C ne sont pas indépendants.

B- Indépendance et inclusion

Définition : A⊂B : A est inclus dans B donc P(A□B) = P(A).
Remarque : On a P(A□B) = P(B|A) x P(A) avec la proba de B sachant A égale à 1, car A étant inclus dans B on est certain d'avoir B !

Conséquences :
Formule de Bayes quand **A⊂B :**

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$



Formule de Bayes quand **B⊂A :**

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)}$$

Attention : A et B ne sont **PAS** indépendants !

C- Indépendance et exclusion

Définition : (A□B) = Ø ; P(A□B) = 0 : A et B sont **exclusifs / disjoints / incompatibles,** donc P(A|B) = P(B|A) = 0.
Exemple : A : « être majeur », B : « être mineur », les deux ne peuvent pas se produire en même temps ils sont incompatibles.

Attention : A et B ne sont **PAS** indépendants !

Incompatibles=exclusifs=disjoints	Indépendants
Ne fait PAS intervenir leur probabilité	Liés à leur probabilité
Ne peuvent PAS se produire en même temps	Peuvent se produire en même temps (*la réalisation d'un n'influençant pas l'autre*)
Défini par : P (A∪B) = P(A) + P(B) Donne : **P (A∩B)=0**	P (A∩B) = P(A) x P(B)