

# VARIABLES ALEATOIRES ET LOIS DE PROBABILITE DISCRETE ET CONTINUE

## I. DEFINITIONS

Dans ce cours on décrira des opérations précises (= **épreuve**) menant à un résultat aléatoire (=un évènement élémentaire).

/!\ On parle de **variable aléatoire** quand le résultat est un **nombre**. Une variable aléatoire est donc une épreuve menant à des évènements élémentaires qui sont des nombres.

Ex : lancer un dé est une variable aléatoire (résultat de 1 à 6), mais pas tirer une carte de jeu car les évènements ne sont ici pas des nombres.

On distingue les variables aléatoires **discrètes** et **continues** :

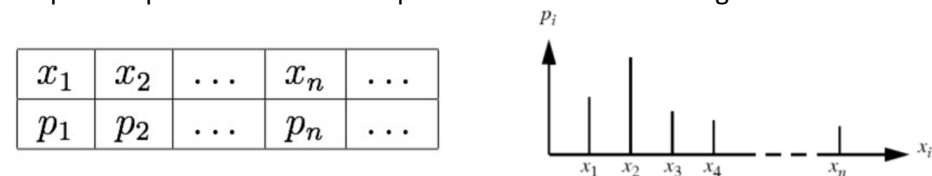
- **Discrète** si le résultat fait partie d'un **ensemble fini ou dénombrable**. Ex : le nombre de pages de tes ronéos d'anat'.
- **Continue** si le résultat est compris dans  $\mathbb{R}$  ou un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On l'appelle aussi **variable à densité**. Ex : dosage de la glycémie.

## II. VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X discrète est définie en donnant l'ensemble des valeurs  $p_1, p_2, \dots, p_n$  qui sont les probabilités de ses différentes éventualités  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Soit  $p_i = P(X = x_i)$  donc  $0 \leq p_i \leq 1$  et  $\sum p_i = 1$

On peut représenter cette loi par une table ou un diagramme en bâtons :



### A. PARAMETRES

- **MOYENNE** : la moyenne  $\mu$  de la variable aléatoire X est la valeur moyenne des résultats que l'on obtiendrait en répétant indéfiniment l'épreuve. C'est un indicateur de **position**.

$$\mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

/!\ : la moyenne de  $x^2 \neq \mu^2$

- **ESPERANCE** : notée  $E(X)$ , c'est un synonyme de la moyenne en probabilités et statistiques.

**Théorèmes de l'espérance :**

- Soit X une v.aléatoire et k une constante réelle : 
$$\begin{cases} E(kX) = k E(X) \\ E(k + X) = E(X) + k \end{cases}$$
- Soit X et Y deux variables aléatoires :  $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

On peut généraliser cette dernière formule en disant que « *l'Espérance de la somme est la somme des Espérances* ».

- **VARIANCE et ECART-TYPE** : Notée  $\sigma^2$ , la variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. L'écart-type est sa racine carrée,  $\sigma$ . Ce sont des paramètres de **dispersion**.

Soit a une constante on a :  $Var(X+a) = Var(X)$  et  $Var(aX) = a^2 Var(X)$

- **VARIABLE CENTREE REDUITE** : on la définit comme

Soustraire sa moyenne à X permet de la « centrer ».

La diviser par son écart-type permet d'avoir une variable « réduite ».

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

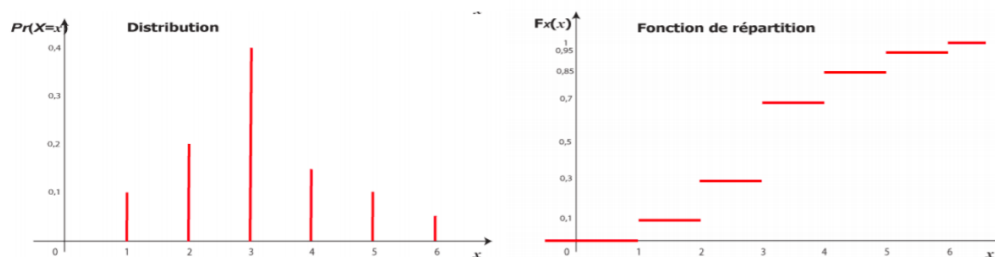
On a alors  $E(Y) = 0$  et  $Var(Y) = 1$

- **FONCTION DE REPARTITION** : on la définit comme  $F(x) = P(X \leq x)$ . C'est une fonction **cumulative** car on additionne toutes les probabilités (pi) des xi survenus avant x. C'est une fonction toujours **monotone croissante**.

*Ex : la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égal à 2 au cours d'un lancer de dé est égal à la probabilité de tirer un 1 + la probabilité de tirer un 2.*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

*!/ La fonction de répartition est à bien distinguer de la fonction de distribution*



### III. LOIS DE PROBABILITE DISCRETES

#### A. Loi de **BERNOULLI** $B(p)$

L'Epreuve de **Bernoulli** est une expérience aléatoire dont l'issue est un « succès » ou un « échec ».

Paramètres : **p** : probabilité d'un succès

**q** = 1-p : probabilité de l'échec

**X** est la variable aléatoire donnant le nombre de « succès » pendant l'épreuve (0 ou 1).

$$P(X = k) = p^k (1 - p)^{1-k} = p^k q^{1-k} \quad \text{pour} \quad k \in \{0, 1\}$$

Pour la loi de Bernoulli, on a alors :  $\mu = p$  et  $\sigma^2 = p(1-p) = pq$

*Ex : Tu as face à toi un sac contenant 15 boules rouges et 3 boules noires. On considère que « tirer une boule noire » constitue un succès, et on en cherche la probabilité.  $P(x = 1) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$*

#### B. Loi **BINOMIALE** $B(n, p)$

La loi **Binomiale** consiste en la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes.

Paramètres : **n** : nombre d'essais indépendants

**p** : probabilité d'un succès

**q** = 1-p : probabilité d'un échec

**X** : variable aléatoire donnant le nombre de « succès » à l'issue de n essais (de 0 à n).

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq n$$

Rappel :  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

On a alors  $\mu = np$  et  $\sigma^2 = np(1-p) = npq$

Remarques :

- Si  $p=0,50$  la forme du diagramme de probabilités d'une distribution normale est **symétrique**  
Si  $p>0,50$  on parle d'**asymétrie positive**. Si  $p<0,50$  on parle d'**asymétrie négative**.
- Quand  $n$  est grand la forme devient symétrique.  
Quand  $n$  est grand et si  $p$  n'est pas trop proche de 0 ni de 1 alors la loi binomiale tend vers la loi **normale**.
- Si  $X$  une variable aléatoire suit  $B(n_1, p)$  et  $Y$  suit  $B(n_2, p)$ , alors  $X+Y$  suit la loi binomiale  $B(n_1 + n_2, p)$
- La loi Binomiale repose sur le principe du tirage **non exhaustif** (**indépendant** des autres tirages), cad que les éléments sélectionnés sont remis dans l'échantillon.  $p$  ne varie donc pas.  
Mais il existe aussi le tirage **exhaustif** (**dépendant** des autres tirages) : sans remise.  $p$  varie au fil des tirages.
- **Taux de sondage** :  $\frac{n}{N}$   
( $n$  la taille de l'échantillon,  $N$  l'effectif de la population)

Si  $\frac{n}{N} \leq 0,10$  on applique la loi **Binomiale**.

Si  $\frac{n}{N} \geq 0,10$ , on utilise la loi **Hypergéométrique**.

*Ex : On prend un dé. On considère l'évènement « obtenir un chiffre pair » comme un succès de probabilité  $p=0,5$ . On tire 3 fois ( $n=3$ ) notre dé de manière indépendante. On cherche la probabilité d'obtenir 2 chiffres pairs (soit  $P(X=2)$  ).*

$$P(X = 2) = C_3^2 p^2 q^1 = \frac{3!}{2!1!} \times 0,5^2 \times 0,5 = 3 \times 0,125 = 0,375$$

### C. Loi HYPERGEOMETRIQUE $H(N, D, n)$

Soit une population de  $N$  individus parmi lesquels  $D$  ont un caractère donné. On prélève un échantillon  $n$  de cette population  $N$ . Les individus de l'échantillon sont tirés simultanément (l'ordre de tirage n'a pas de sens) et sans remise.

Paramètres: **N** : effectif de la population

**D** : nb de personnes présentant le caractère étudié dans la population

**D/N** : probabilité  $p$  d'avoir le caractère étudié

$$\min(0; n - D) \leq k \leq \max(n; D)$$

On a 
$$P(X = k) = \frac{C_D^k \cdot C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$
 donc  $\mu = \frac{nD}{N} = np$  et  $\sigma^2 =$

$$\frac{nD}{N} \times \frac{N-D}{N} \times \frac{N-n}{N-1} = npq \times \frac{N-n}{N-1}$$

*Ex : Dans une usine, sur 100 boîtes de médicaments ( $N$ ), 30 ont un défaut ( $D$ ). On tire au sort 20 machines ( $n$ ) et on cherche la probabilité d'en obtenir 1 seule ayant un défaut :*

$$P(X = 1) = \frac{C_{30}^1 \cdot C_{70}^{19}}{C_{100}^{20}}$$

### D. LOI GEOMETRIQUE $G(p)$

On répète des épreuves de **Bernoulli jusqu'à l'obtention d'un succès**.

Paramètres : **X** : v-a « nb d'essais nécessaires » à l'obtention du 1er succès

**p** : probabilité d'un succès

**q** : probabilité d'un échec

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} = pq^{k-1} \quad \text{pour} \quad k \in \mathbb{N}^*$$

On a alors  $\mu = \frac{1}{p}$  et  $\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$

Ex : on lance un dé jusqu'à obtenir un 2. La probabilité d'obtenir un 2 au bout de 2 essais est

$$P(x = 2) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^1.$$

Explication formule : avoir un 2 au bout de 2 essais signifie échouer 1 fois ( $q^1$ ) puis réussir 1 fois ( $p$ ). La puissance ( $q^x$ ) comptabilise le nombre d'échecs avant de réussir.

### E. Loi de POISSON $P(\lambda)$

Utilisée pour déterminer la probabilité qu'un certain nombre d'événements se réalisent **par unité** de temps (ou de volume, de surface). On la retrouve souvent dans les domaines de la qualité, la sécurité et la fiabilité.

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$$

Paramètres :  **$\lambda$  : taux** moyen avec lequel un événement particulier se produit en général.

**X** : variable aléatoire qui donne le nombre d'événement particulier qui se produisent dans la situation étudiée.

$$\mu = \sigma^2 = \lambda$$

Ex : Un médecin spécialiste reçoit en moyenne 2 patients par heure. Quelle est la probabilité qu'il voit 2 patients en 2h ? On a  $\lambda=2$  en 1h donc  $\lambda=4$  pour 2h.

$$P(x = 2) = \frac{4^2 e^{-4}}{2!} = 8e^{-4}$$

(à noter : la somme de 2 variables aléatoires de Poisson suit une loi de poisson avec comme paramètre  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ )

## IV. VARIABLES ALEATOIRES CONTINUES

Ce qui caractérise une variable aléatoire continue, c'est qu'elle a une probabilité nulle d'être égale à un nombre donné

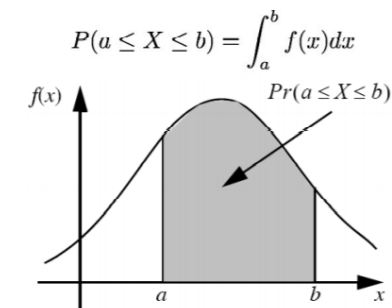
$$P(X=k) = 0 ; P(X=11,111) = 0 ; P(X=\sqrt{2}) = 0$$

On utilisera donc des intervalles :  **$P(a \leq X \leq b) \neq 0$**

### • La densité de probabilité :

C'est une fonction utilisée pour définir la loi de probabilité de X.

**$P(a \leq X \leq b)$  est l'aire sous la courbe.**

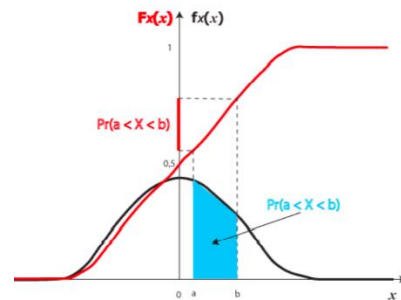


Le passage du discret au continu transforme les probabilités en fonctions et les sommes en intégrales. En découlent quelques propriétés (jetez-y un œil mais à mon sens ce n'est pas le genre de choses trop susceptibles de tomber...)

- $f(x) \geq 0$  (analogue à  $p_i \geq 0$ )
- $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$  (analogue à  $\sum_i p_i = 1$ )
- $\mu = E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)dx$  (analogue à  $\sum_i x_i p_i$ )
- $\sigma^2 = var(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 f(x)dx$  (analogue à  $\sum_i (x_i - \mu)^2 p_i$ )
- $\sigma^2 = var(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx - \mu^2$  (analogue à  $\sum_i x_i^2 p_i - \mu^2$ )

- **La Fonction de Répartition :**

Elle est toujours **croissante, monotone et continue**. Partant de 0 pour  $x \rightarrow -\infty$ . Atteignant 1 pour  $x \rightarrow +\infty$ . (en rouge la fonction de répartition, en noir la fonction de densité)



## V. Lois de probabilités continues

### A. Loi EXPONENTIELLE $E(\lambda)$

On l'utilise dans des situations où le « risque instantané » de décès ou « taux de défaillance » est constant. (durée de vie d'un composant...)

- **Fonction de densité :**  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  avec  $\lambda > 0$  et  $x \geq 0$

Paramètres :  $\lambda$  = taux de défaillance instantané

$$\mu = 1 / \lambda$$

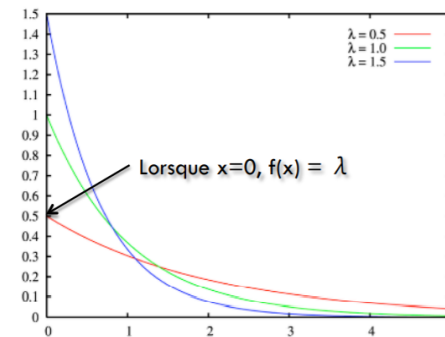
$$\sigma^2 = 1 / \lambda^2$$

- **Fonction de répartition:**  $F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$

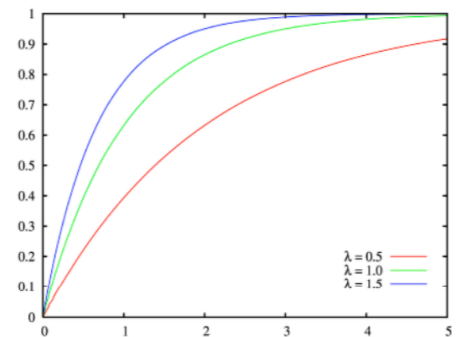
Si un évènement se réalise selon une loi de **Poisson** de paramètre  $\lambda$ , le **temps entre deux réalisations consécutives** de l'évènement considéré est distribué selon une **loi exponentielle de paramètre  $1/\lambda$** .

*Exemple : La radioactivité peut être décrite car à chaque instant le taux de radioactivité (la probabilité de désintégration) est constant. C'est-à-dire que peu importe le temps écoulé ou le nombre d'atomes déjà désintégrés la probabilité que le noyau se désintègre reste la même pour un instant donné.*

Densité de probabilités (f):



Fonction de répartition (F):



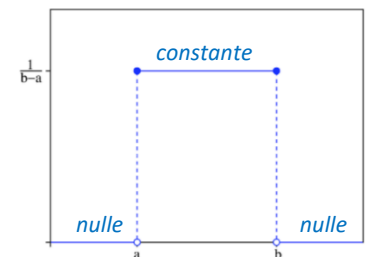
### B. Loi UNIFORME $U(a; b)$

- **Fonction de densité :**  $f(x) = \frac{1}{b-a}$  si  $x \in [a, b]$

$$f(x) = 0 \quad \text{si } x \notin [a, b]$$

avec  $\lambda > 0$  et  $x \geq 0$

Densité de probabilités (f):



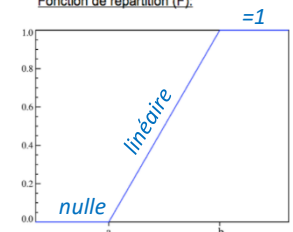
Paramètres : intervalle  $[a, b] \in \mathbb{R}$

$$\mu = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Toutes les valeurs ont la même probabilité (par exemple un lancer de dé, on a 1/6 de chance pour chaque valeur)

- **Fonction de répartition :**

Fonction de répartition (F):



*Exemple : l'heure d'arrivée du bus suit une loi uniforme de densité  $f(x) = 1/4$  dans l'intervalle  $[8h38; 8h42]$ . Quelle est la probabilité qu'il passe avant 8h40 ?*

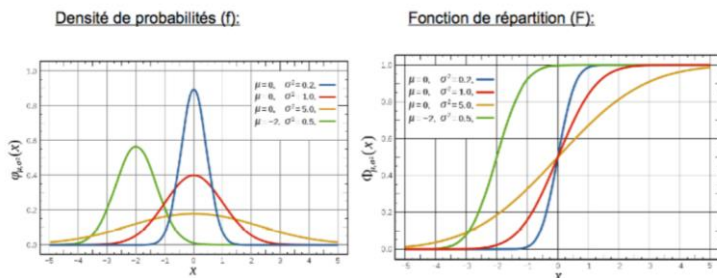
$$P(X \leq 8h40) = \frac{x - a}{b - a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

### C. Loi NORMALE $N(\mu, \sigma)$

Fonction de densité :  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  pour  $-\infty \leq x \leq +\infty$

Paramètres :  $\mu$  et  $\sigma$ , respectivement moyenne et écart-type de X.

La **densité** de probabilité d'une v-a normale est **symétrique** autour de  $\mu$  et a deux points d'inflexion aux abscisses  $\mu - \sigma$  et  $\mu + \sigma$ . Son utilisation est très vaste.



#### Valeurs limites importantes à savoir

- il y a 10 chances sur 100 pour que  $X < \mu - 1,65\sigma$  ou  $X > \mu + 1,65\sigma$
- il y a 5 chances sur 100 pour que  $X < \mu - 1,96\sigma$  ou  $X > \mu + 1,96\sigma$
- il y a 1 chance sur 100 pour que  $X < \mu - 2,58\sigma$  ou  $X > \mu + 2,58\sigma$
- il y a 1 chance sur 1000 pour que  $X < \mu - 3,30\sigma$  ou  $X > \mu + 3,30\sigma$

On utilisera principalement la 2<sup>e</sup> ligne, surtout pour les tests statistiques. Une variable aléatoire distribuée normalement a 5 chances sur 100 de présenter un écart à la moyenne supérieur à 1,96 (arrondi souvent à 2).

*Ex : La taille des hommes adultes suit une loi normale de moyenne  $\mu=1,80$  et d'écart-type  $\sigma=6$ cm.*

*68% de cette population est comprise dans  $[\mu-\sigma ; \mu+\sigma]$  soit entre 1,74m et 1,86m.*

*95% de cette population se trouve dans l'intervalle  $[\mu-1,96\sigma ; \mu+1,96\sigma]$*

*La proportion d'homme dont la taille est inférieure à 168,2 cm ( $\mu - 1,96\sigma$ ) ou supérieure à 191,8 cm ( $\mu + 1,96\sigma$ ) est de  $2,5\% + 2,5\% = 5\%$*

*La proportion d'homme dont la taille est supérieure à 189,9 cm ( $\mu + 1,65\sigma$ ) est de 5%. La proportion d'homme dont la taille est inférieure à 189,9 cm ( $\mu + 1,65\sigma$ ) est de 95%.*

### D. Loi Normale Centrée Réduite $N(0 ; 1)$

La loi normale centrée réduite est une loi normale de **moyenne 0 et de variance 1**.

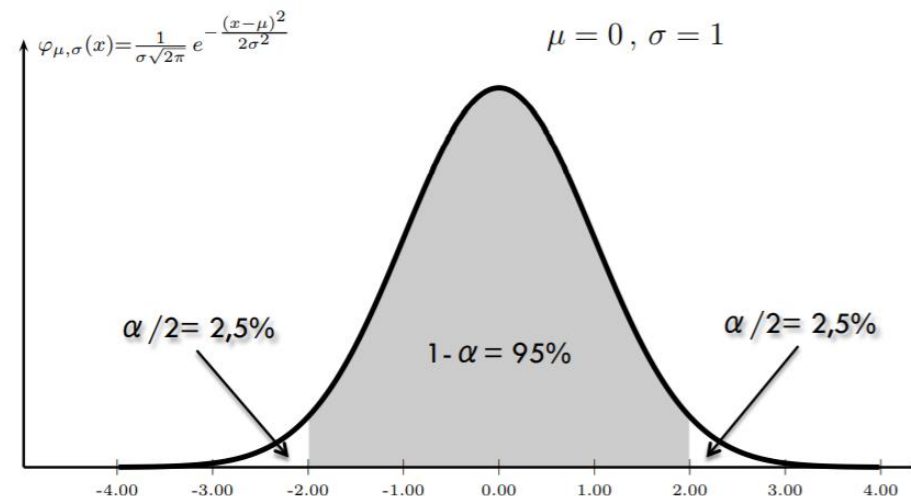
Centrée → Autour de la moyenne  $\mu = 0$

Réduite → Ayant une variance  $\sigma = 1$

$N(\mu ; \sigma) \Rightarrow N(0 ; 1)$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Ce changement de variable est très utile en pratique, on peut ramener n'importe quel problème de probabilité à distribution normale (qui suit donc une loi normale) à un seul cas : celui de la loi normale centrée réduite



## VI. APPROXIMATIONS

Certaines lois peuvent être approximées par d'autres selon certaines conditions :

LOIS	CONDITIONS	CONSEQUENCE
<b>BINOMIALE</b> → <b>POISSON</b>	Si $N > 50$ $p \leq 0,10$ $np \leq 5$	$B(n;p) \rightarrow P(\lambda=np)$
<b>BINOMIALE</b> → <b>NORMALE</b>	Si $np \geq 5$ $nq \geq 5$	$B(n;p) \rightarrow N(np; \sqrt{npq})$
<b>POISSON</b> → <b>NORMALE</b>	Si $\lambda > 25$	$P(\lambda) \rightarrow N(\lambda; \sqrt{\lambda})$

*Et voilà, nous sommes (déjà !) à la fin de ce cours. Si tu es arrivé(e) jusque-là BRAVO, je sais que ce n'est pas un cours évident, mais je t'assure que c'est possible de le comprendre et même de le maîtriser avec de l'entraînement !*

*Comme c'est mon premier support j'en profite pour remercier tous les copains de P1 sans qui le moral n'aurait jamais tenu jusqu'au bout : Ju, Eli, Adrien, Anélia, Joss, L, l'Ekz évidemment et tout le Co (merci pour votre accueil !).*

*A toi qui lis encore cela, ne lâches rien ! Crois en toi, la ligne d'arrivée est peut-être bien plus près que tu ne le penses...*