Probabilités conditionnelles, théorème de Bayes indépendance en probabilités

I- Définitions de base en probabilités

Ω Ensemble fondamental, l'univers : P(Ω)=1 cela représente 100% des événements, la probabilité est certaine. *Ex : tout l'amphi.*

P(A) : Probabilité de l'événement A. *Ex : Probabilité qu'un étudiant en PACES de Nice aime les gâteaux.*

P(Ā) ou P(ꞓA) : Probabilité de l'événement contraire de A, c'est-à-dire ne pas avoir A. On peut dire aussi que Ā c'est l'univers moins l' événement A. On peut obtenir cette probabilité en faisant P(Ā) = P(Ω) – P(A) = 1 – P(A). *Ex : Probabilité qu'un étudiant en PACES de Nice n'aime pas la Biostat grr (si A est aimer la biostat).*

P(A∩B) = P(B∩A) : Probabilité de A et de B = Probabilité de B et A (c'est pareil 😉) ou probabilité de A inter B (car c'est l'intersection de l'évènement A et B). *Ex : Probabilité qu'un étudiant en PACES de Nice aime les gâteaux et la biostat'* 😍

II- Probabilités conditionnelles

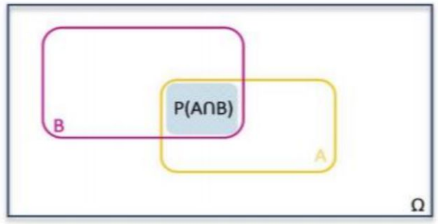
A- Introduction

Définition : Une probabilité conditionnelle s'intéresse à la probabilité de réalisation d'un événement A à condition qu'un autre événement B ait déjà été réalisé.

Remarque : Ainsi on s'intéresse seulement aux évènements A réalisés parmi les événements B réalisés et non plus parmi tout l'univers.

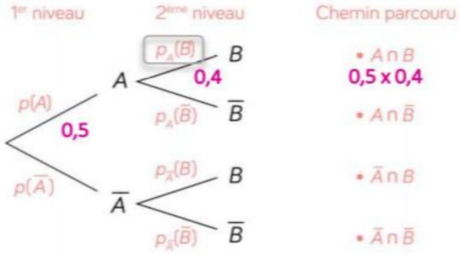
Notation : P(A|B)=PB(A) Probabilité de A sachant B réalisé.

1)



2)

3)



1) P(A∩B) (probabilité d'une intersection) on regarde sur tout l'univers Ω, car on cherche la probabilité d'A ET B sur l'univers.
2) P(A|B) (probabilité conditionnelle) on regarde parmi la population B seulement, car on cherche la probabilité de A PARMI B. On restreint Ω à B.
3) Sur cet arbre on voit que la probabilité conditionnelle est entourée.

B- Formule de la probabilité conditionnelle

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Equivalence de la formule en lettres : *La probabilité qu'un PACES ait perfect la biostat sachant qu'il a assisté à tous les cours est égale au nombre de PACES qui ont perfecté la biostat et assisté à tous les cours sur le nombre de PACES qui ont assisté à tous les cours !*

C- Théorème de la multiplication

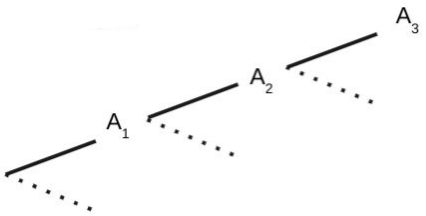
On sait que : P(A|B) = P(A∩B) / P(B) ↔ P(A∩B)=P(A|B)*P(B)
Donc : P(A∩B)=P(B∩A)=P(A|B)*P(B)=P(B|A)*P(A)

Remarque : *En UE4 il est important de savoir le nom du théorème de la formule qu'on utilise* 😉
Remarque bis : *Le théorème peut se généraliser pour plus de deux événements de la manière suivante :*

$$P(A1 \cap A2 \ldots \cap An) = P(A1) * P(A2 \mid A1) * \ldots * P(An \mid A1 \cap A2 \ldots \cap An\text{-}1)$$

Explication avec un schéma :

On a une boite de 10 pâtisseries avec 5 croissants, 2 pains au chocolat et 3 tartes au citron. On veut connaître la probabilité de tirer 3 croissants d'affilé dans une boite neuve. A_1 : tirer un premier croissant / A_2 : tirer un deuxième croissant / A_3 : tirer un troisième croissant.



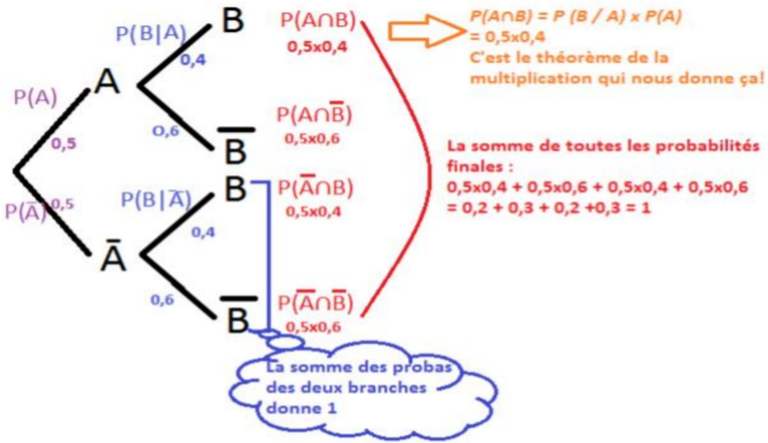
On a donc $P(A1) = \frac{5}{10}$; $P(A2|A1) = \frac{5-1}{10-1} = \frac{4}{9}$; $P(A3|A1 \cap A2) = \frac{4-1}{9-1} = \frac{3}{8}$;

$P(A3|A1 \cap A2) = \frac{4-1}{9-1} = \frac{3}{8}$; $P(A1 \cap A2 \cap A3) = P(A1) \times P(A2|A1) \times P(A3|A1 \cap A2)$
$= \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{12}$

Il y a donn 1/12 de chance de tirer 3 croissants d'affilé !

III- Diagramme en arbre

Définition :
Soit une suite finie d'événements quand une expérience dépend du résultat de l'expérience passée ce sont des **probabilités conditionnelles**. On utilise les arbres pour illustrer les situations !
1. Selon le théorème de la multiplication la probabilité d'un chemin est le produit de chaque branche du chemin !
2. Les chemins s'excluent mutuellement.
3. La somme de toutes les probabilités des finalités doit être 1.



Exemple : Si l'événement A considéré est « avoir plus de 20 ans » et l'événement B « être blond ». Le chemin 1 : $P(A \cap B)$ est « avoir plus de 20 ans ET être blond ». Le chemin 2 est : $P(A \cap \bar{B})$ est « avoir plus de 20 ans ET ne pas être blond », On comprend bien qu'un chemin est exclusif, les deux chemins ne sont pas compatibles !

IV- Formule et théorème de Bayes

A- Formule de Bayes

Définition d'une proba conditionnelle :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ ou } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

+

Théorème de la multiplication :

$$P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B) = P(B \mid A) \times P(A)$$

=

Formule de Bayes :

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) \times P(B)}{P(A)}$$

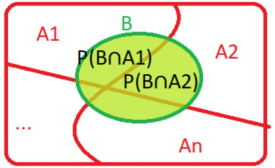
Exemple d'application de la formule de Bayes 😊:
*Dans une classe on a 20 élèves. On a 15 élèves droitiers et le reste des élèves est gaucher. On sait aussi que 12 d'entre eux ont les yeux marrons, 4 ont les yeux bleus et le reste a les yeux verts. Parmi les gauchers, 4 ont les yeux marrons, et celui restant a les yeux bleus. On veut savoir quelle est la **probabilité si on tire un élève au hasard parmi ceux qui ont les yeux marrons de tomber sur un gaucher.***

A : être gaucher / B : avoir les yeux marrons On a : $P(A) = 5/20$ et $P(B) = 12/20$ et $P(B|A) = 4/5$.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) * P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{5} * \frac{5}{20}}{\frac{12}{20}} = \frac{1}{3}$$

B- Théorème de Bayes

Soit un univers Ω formé par un ensemble d'événements de A1 à An. On dit que cet ensemble d'événements de A1 à An constitue une partition de Ω. L'ensemble d'événements de A1 à An dont l'union forme Ω. C'est une illustration du **théorème des probabilités totales :**
$P(B) = P(B \cap A1) + P(B \cap A2) + \ldots + P(B \cap An)$:



Théorème des probabilités totales :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$$

+

Théorème de la multiplication :

$$P(B \cap A_n) = P(B \mid A_n) \times P(A_n)$$

=

$$P(B) = P(B \mid A_1) \times P(A_1) + P(B \mid A_2) \times P(A_2) + \ldots + P(B \mid A_n) \times P(A_n)$$

+

Formule de Bayes :

$$P(A_n \mid B) = \frac{P(B \mid An) \times P(An)}{P(B)}$$

=

Théorème de Bayes :

$$P(An \mid B) = \frac{P(B \mid An) \times P(An)}{P(B \mid A1) \times P(A1) + P(B \mid A2) \times P(A2) + \ldots + P(B \mid An) \times P(An)}$$

V- Evénements indépendants

A- Introduction

Définition : Deux événements sont indépendants si P(B∩A) = P(A) x P(B). Les événements sont indépendants dans la mesure où la probabilité de réalisation de A ne change pas avec la réalisation de B. Soit P(A|B)=P(A) et P(B|A)=P(B) ! Conséquences :

- A et $\bar{B}$ sont indépendants.
- $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.
- $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Cas de trois événements : Soient A, B et C.
S'ils sont indépendants deux à deux (A indépendant de B, A indépendant de C et C indépendant de B). Et si P(A∩B∩C)=P(A)xP(B)xP(C), alors ces trois événements sont indépendants !

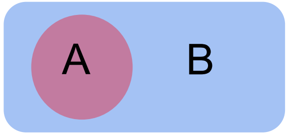
Remarque : La seconde condition n'est pas une conséquence de la première. C'est à-dire que les trois événements peuvent être indépendants deux à deux mais on peut avoir : P(A|B∩C) ≠ P(A) et du coup A, B, C ne sont pas indépendants.

B- Indépendance et inclusion

Définition : A⊂B : A est inclus dans B donc P(A∩B) = P(A).
Remarque : On a P(A∩B) = P(B|A) x P(A) avec la proba de B sachant A égale à 1, car A étant inclus dans B on est certain d'avoir B !

Conséquences :
Formule de Bayes quand **A⊂B :**

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$



Formule de Bayes quand **B⊂A :**

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)}$$

Attention : A et B ne sont **PAS** indépendants !

C- Indépendance et exclusion

Définition : (A∩B) = Ø ; P(A∩B) = 0 : A et B sont **exclusifs / disjoints / incompatibles,** donc P(A|B) = P(B|A) = 0.
Exemple : A : « être majeur », B : « être mineur », les deux ne peuvent pas se produire en même temps ils sont incompatibles.

Attention : A et B ne sont **PAS** indépendants !

Incompatibles=exclusifs=disjoints	Indépendants
Ne fait PAS intervenir leur probabilité	Liés à leur probabilité
Ne peuvent PAS se produire en même temps	Peuvent se produire en même temps (*la réalisation d'un n'influençant pas l'autre*)
Défini par : P (A∪B) = P(A) + P(B) Donne : **P (A∩B)=0**	P (A∩B) = P(A) x P(B)

mini dédi pour vous dire que je suis désolé que dans certains exemples les calculs sont verts, mais j'avais fait à la base la fiche en rose et les exemple en vert mais je trouvais ça faisais trop lourd avec trop de rose, si vous voulez la fiche en version rose, dites le moi je la mettrais aussi, sur ce bisous et bon courage