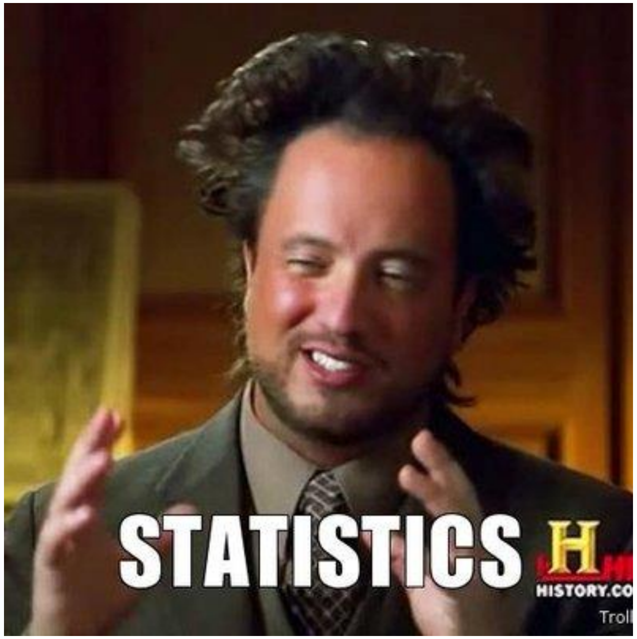
PROBABILITÉS ÉLÉMENTAIRES & DÉNOMBREMENTS



I- Définitions

Ensemble: liste ou collection d'objets définis (ex: l'ensemble des tuteurs).

Element de l'ensemble: objet appartenant à l'ensemble (ex: votre tuteur préféré).

L'ensemble peut se définir en **extension** (=explicite): on liste tous les éléments un à un (ex: A=(2,4,6,8)).

L'ensemble peut se définir en **comprehension** (=implicite): on donne des propriétés caractérisant les éléments (ex: A=(x : x est un nombre pair)).

Les notions de base

- Si x est un élément de l'ensemble E, alors x appartient à E (x ∈ E). (ex : 1 appartient à l'ensemble A : {1 ; 2 ; 3}.)

- Dire que l'ensemble B est une **partie** de l'ensemble A signifie que B est compris dans A (B ⊂ A). (ex : B : {1 ; 2} est une partie de A : {1 ; 2 ; 3}).

- L'ensemble vide est noté ∅.

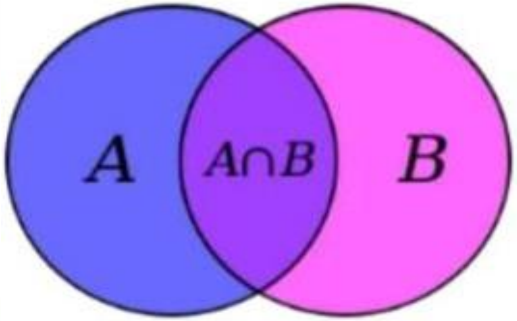
- L'univers est noté Ω (oméga).

II- OPÉRATIONS

L'intersection

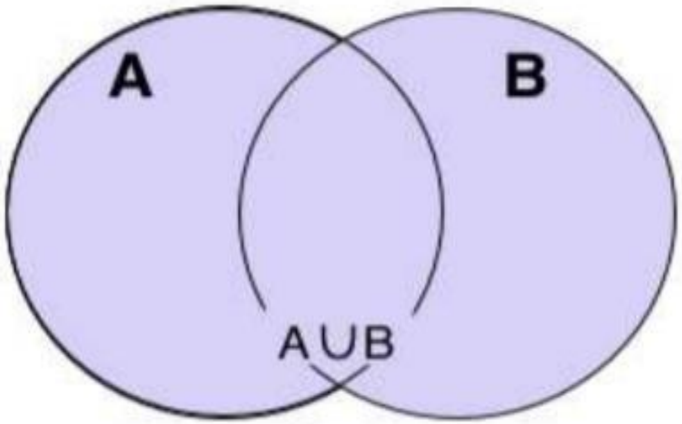
Cette opération se note **«A∩B»** (A et B sont deux ensembles). Elle signifie que l'on prend en compte le ou les **éléments** appartenant à la fois à **A <u>et</u> à B**.

Il existe un cas particulier où **A∩B = Ø**, c'est-à-dire qu'il n'y a <u>pas de solution</u>. Dans ce cas, les deux ensembles sont dits «**<u>disjoints</u>** ».



La réunion

Cette opération se note **«A∪B»**. Elle signifie que l'élément appartient soit **à A**, soit **à B**, soit **aux deux** en même temps.



Le complémentaire

Noté **∁A ou Ā**, le complémentaire représente tout ce qui **n'appartient pas** à l'ensemble en question.

Donc : $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ de même : $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$

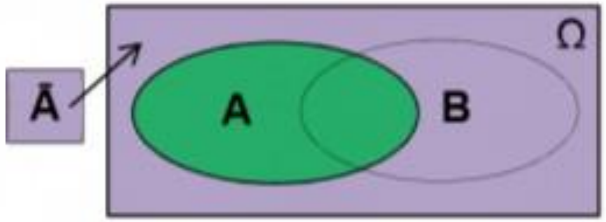


Schéma du complémentaire de A

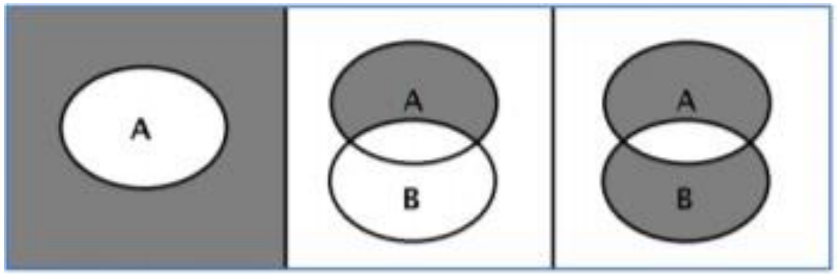
Différence & différence symétrique

La différence est notée **A-B** et représente ce qui **appartient à A**, mais qui **n'appartient pas à B**. Elle est aussi appelée le complémentaire de B relatif à A.

La **différence symétrique AΔB** représente tout ce qui

appartient à A ou à B, sans appartenir à A∩B.

Elle correspond au lien logique ou exclusif.



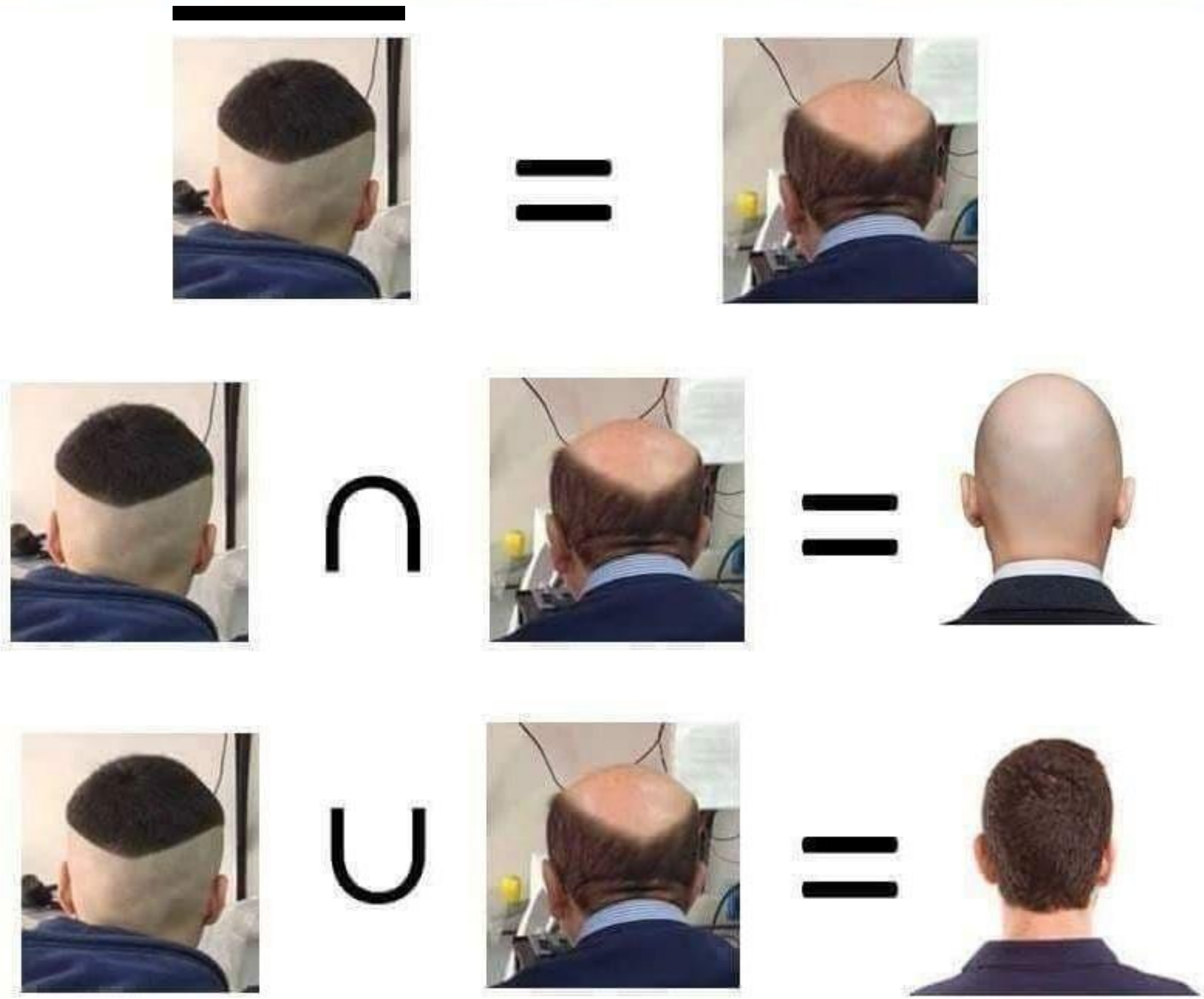
Schémas de gauche à droite : complémentaire, différence et différence symétrique.

Opérations à comprendre

$$A \cup A = A$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cup \Omega = \Omega$$
$$A \cup \complement A = \Omega$$
$$\complement\complement A = A$$
$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$$

$$A \cap A = A$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cap \Omega = A$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing$$
$$A \cap \complement A = \varnothing$$
$$\complement\Omega = \varnothing, \complement\varnothing = \Omega$$
$$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$$

Evitez le par cœur ici



III-LES ENSEMBLES

« *Métamorphose de Narcisse* », Salvador Dalí, 1937

Les différents types d'ensembles

Ensembles finis	Ensembles infinis	
Ensemble **nul**, ou contenant un **nombre fini** d'éléments). *Ex : A = {1 ; 2 ; 3}*	**Dénombrables**	**Indénombrables**
	Chaque éléments peut être **compté** *Ex : l'ensemble des entiers naturels (1, 2, 3, 4, 5 …)*	On ne **peut pas compter** tous les éléments *Ex : l'ensemble des réels (1, 1.1, 1.11, 1.111 …), on ne peut pas tout compter* ***car il y a une infinité de nombres entre 1 et 2*** *par exemple)*

Les ensembles produits

Soient deux ensembles : **A** et **B**. L'ensemble produit de **A** et **B** est l'ensemble des **couples ordonnés (a ; b)**, avec a ∈ A et b ∈ B. Pour calculer le **nombre de couples** possibles d'un ensemble produit : **Card(A) * Card(B)** avec Card(A) le nombre d'éléments de l'ensemble A.

(ex : si A : {rouge ; bleu} et B : {1 ; 2 ; 3}, alors l'ensemble produit de A et B est {(rouge ; 1), (rouge ; 2), (rouge ; 3), (bleu ; 1), (bleu ; 2), (bleu ; 3)} donc : 2 * 3 = 6 possibilités.)

Les familles d'ensemble & la partition

Soit l'ensemble A = {1, 2, 3}. Cet ensemble est constitué de **différents sous-ensembles** ({1}, {1, 2} …), et tous ces sous-ensembles forment la **famille des parties** de A. Un ensemble contenant p éléments possède $\mathbf{2^p}$ **parties** (= sous-ensembles).

(ex : Soit A = {a ; b}, ici, la famille des parties de A est P(A) : {Ø,{a},{b},{a,b}}, c'est-à-dire toutes les «combinaisons» que l'on peut réaliser avec l'ensemble A.)

La **partition** est la division d'un ensemble X en sous-ensembles **disjoints** dont la **réunion forme X.**

QRU RÉCAP

A propos des probabilités élémentaires et les ensembles :

A- P(∁∅)=Ω
B- Dans l'ensemble explicite (=en intention) on liste tous les éléments un à un.
C- Les ensembles finis sont dénombrables ou indénombrables.
D- Un ensemble avec 5 éléments possède 36 parties.
E- Les items A, B, C et D sont faux.

CORRECTION : RÉPONSE E

A propos des probabilités élémentaires et les ensembles, donnez la réponse vraie :

A- P(∁∅)=P(Ω)=1
B- L'ensemble explicite est en extension!
C- Les ensembles infinis sont indénombrables et les ensembles finis sont dénombrables.
D- L'ensemble a 2^5 parties, ce qui fait 32 sous-ensembles.
E- Les items A, B, C et D sont bien faux.

IV- DÉNOMBREMENTS

« *Le jardin des délices* », Jérôme Bosch, 1503-1515

p-liste avec remise

Tirages ordonnés avec remise

La formule utilisée est **Card(E)^{p}** , avec Card(E) le nombre d'éléments de l'ensemble et p le nombre de tirages.

(ex : j'ai les 26 lettres de l'alphabet (Card(E) = 26) et je veux savoir combien de mots de 3 lettres je peux former…
Il y 26^3 mots possibles (« aaa », « aab », « boa », « zyx »…), l'ordre compte et « aba » est différent de « baa »)

Arrangements avec repetition

Tirages ordonnés avec remise.

La p-liste et **l'arrangement avec répétition** c'est le même calcul dans la même situation ainsi, si on tire x fois parmi n éléments, la formule est **:** n^x.

(ex : on tire dans un paquet de 52 cartes une carte, on la repose (dans le paquet), on en tire une autre, il y a 52^2 possibilités de tirages !).

Arrangements de n éléments pris p à p

Tirages ordonnés sans remise.

p = nombre de tirages / n = nombre d'éléments

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)\,!}}$$

Explication factoriels:

- Pour tout n nombre entier naturel, le factoriel de n se définit par : n! = n * (n-1) * (n-2) * … * 1.
- Cas particulier : 0! = 1.

Ex: en utilisant chaque lettre de l'alphabet une fois, combien de mots a 5 lettres peut on faire?

$$A_{26}^5 = \frac{26!}{(26-5)!} = 26 * 25 * 24 * 23 * 22 = 7893600.$$

Permutation d'un ensemble fini à n éléments

Tirages ordonnés sans remise

La permutation **ressemble à l'arrangement** de n éléments pris p à p, mais s'utilise lorsque **n=p**, donc il y a tirage **jusqu'à épuisement**.
La formule est donc n! parce que :

$$\frac{n!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Permutations avec repetition

Tirages ordonnés sans remise

Utilisé lors des **permutations d'un ensemble**, lorsque plusieurs éléments de l'ensemble appartiennent à une **même catégorie** (k_1, k_2, k_3 … k_x) et qu'**on ne considère que la catégorie** pour l'ordre.

$$\frac{n!}{k1! * k2! * \cdots * kn!}$$

(ex : une urne contient 5 boules rouges, 3 noires, 4 bleues et 2 vertes. Combien existe-il d'ordre de tirage en prenant en compte uniquement la couleur des boules?

$$\frac{14!}{5! * 3! * 4! * 2!}$$

Combinaison de n éléments pris p à p

Tirages non ordonnés sans remise (= tirages simultanés)

$$C_n^p = \frac{n\,!}{p!\,(n-p)!}$$

Je tire au hasard 6 boules dans une urne de 24 boules, combien de combinaisons de boules sont possibles?

$$\rightarrow C_{24}^{6} = \frac{24\,!}{6\,!(24-6)\,!}$$

QRU APPLICATION

Pablo Picasso tire 2 billes (l'une avant l'autre) dans un sac de 9 billes numérotées de 0 à 8. Entre chaque tirage il repose la bille. Il se demande combien de tirages différents de 2 chiffres il peut possiblement obtenir :

A- 8^2
B- 2^{10}
C- 96
D- 91
E- Tout est faux

CORRECTION : RÉPONSE E

Pablo tire successivement 2 éléments = billes dans un ensemble de 9 éléments (Card(E)=9 et p=2) qui ne change jamais car à chaque tirage il repose les billes. Il veut connaitre le nombre de tirages possibles (donc par exemple (8 ; 2 =/= 2 ; 8)).

Ainsi, on utilise la p-list avec remise :

Card(E)^{p} : $9^2 = 81$

Donc les items A, B, C et D sont faux.

QRU APPLICATION

Marie est somnambule et décide de voler 12 os à un cadavre dans un cimetière. Sachant qu'il y a 206 os dans le corps humain et qu'elle dort, Marie ne prend pas l'ordre en compte. Combien de tirages différents des 12 os existe-t-il?

A) On utilise la permutation avec répétition

B) $C_{206}^{12} = \frac{206!}{12!(206-12)!}$

C) Il y a 206^{12} possibilités

D) $A_{206}^{12} = \frac{206!}{(206-12)!}$

E) Tout est faux

CORRECTION : RÉPONSE B

A) Faux: l'ordre ne compte pas et on n'a pas de catégories

B) Vrai: c'est un tirage non ordonné (Marie ne prend pas l'ordre en compte) et sans remise (elle ne va pas remettre les os dans le cadavre...)

-> COMBINAISON

C) Faux: c'est l'arrangement avec répétition, mais il nous faut la combinaison ici

D) Faux: l'ordre ne compte pas, donc pas d'arrangement!

E) Faux

QUESTION APPLICATION

Carl adore faire des expéditions dans l’Antarctique afin d’observer les espèces endémiques et leur distribution. Un matin, alors qu’il se baignait, il croise 1 manchot, 2 phoques, ~~6 girafes~~ et 8 baleines. Il se rappelle des cours de Staccini et se demande combien il existe de permutations en prenant en compte uniquement l’espèce des animaux?

CORRECTION

En prenant uniquement en compte l'espèce = catégorie,
On utilise la permutation avec répétition :

$$\frac{\mathbf{n}!}{\mathbf{k1}! * \mathbf{k2}! * \cdots * \mathbf{kn}!}$$

Ici : n = 1+2+8 = 11 et k1=1, k2=2, k3=8

Donc : $\frac{11!}{1! * 2! * 8!} = \frac{11 * 10 * 9}{1! * 2!} = \frac{990}{2} = 495.$

V-ELEMENTS DE PROBABILITÉS

« *L'école d'Athènes* », Raphaël, 1508/1512

Définitions

Phénomène **déterministe** : dont l'issue est **prévisible**

Phénomène **aléatoire** (expérience aléatoire) : dont l'issue n'est **pas prévisible.**

L'ensemble **fondamental** (Ω) représente l'ensemble de **tous les résultats** possibles.

Un évènement, quant à lui, est un **sous-ensemble** de l'ensemble fondamental.

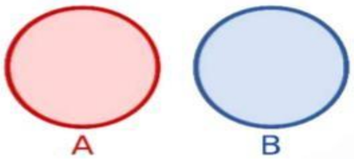
Un événement élémentaire est constitué d'**un seul** résultat de l'ensemble.

L'ensemble vide ø est un évènement **impossible**.

Probabilités

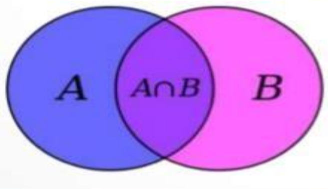
Une probabilité est un nombre allant de **0 à 1** pour mesurer la chance de réalisation de l'événement

P(ø) = 0, ce qui signifie que l'événement ne peut pas se produire et **P Ω= 1.**



Si **P(A∩B) = 0**, alors A et B **s'excluent mutuellement**, ils sont dits **incompatibles**. Les deux évènements ne peuvent pas se produire en même temps. Dans ce cas-là, **P(A∪B) = P(A)+ P(B).**

P (A∪B) = P(A)+P(B)–P(A∩B) = théorème des probabilités totales



QRU

On considère les évènements A et B. $P(A)=0,5$, $P(B)=0,6$ et $P(A \cup B)=0,7$. Quelle est la valeur de $P(A \cap B)$?

A) 0,3
B) 1,1
C) 0,4
D) 6,9
E) Tout est faux

CORRECTION : RÉPONSE C

A) Faux

B) Faux

C) Vrai, $P(A \cap B)=P(A)+P(B)-P(A \cup B)=0,5+0,6-0,7=0,4$

D) Faux

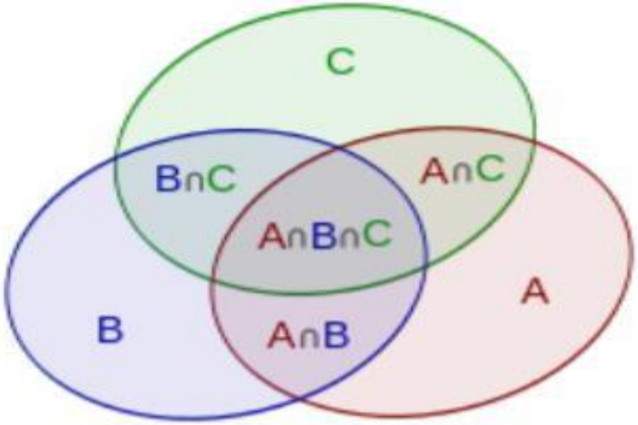
E) Faux

La propriété d'additivité forte / formule de Poincaré / formule d'inclusion-exclusion / formule de crible

La propriété **d'additivité forte** ou formule **de Poincaré** ou **d'inclusion-exclusion** ou **de crible**.

Pour n=3 :

$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(B\cap C) - P(C\cap A) + P(A\cap B\cap C)$



Equiprobabilité

Lors d'une situation d'équiprobabilité, chaque **évènement élémentaire** a la même probabilité.

Dans ce cas-là, la probabilité d'un évènement A est :
$P(A)=Card(A)/Card(\Omega)$.

Ex : Dans une urne, il y a 15 boules, dont 7 bleues. L'évènement A est « tirer une boule bleue », P(A) = 7/15.

Probabilités : Ensemble fini

Lorsque l'on travaille sur un ensemble fini, la probabilité de l'évènement est **comprise <u>entre 0 et 1</u>**. De plus, la somme des probabilités de tous les évènements est **toujours égale à 1**.

Exercice : Considérons un dé biaisé : P(1) = 1/3, P(2) = 1/6, P(3) = 1/12, P(4) = 1/12, P(5) = 1/4.

Trouver P(6) = ?

On sait que P(1)+ P(2)+ P(3)+ P(4)+ P(5)+P(6)=1

Donc 1/3 + 1/6 + 1/12 + 1/12 + 1/4 + P(6) = 1

→ P(6) = 1 – 11/12 = 1/12

QRU de BG

On considère les évenements A, B et C, avec $P(A)=0,04$, $P(B)=0,06$ et $P(C)= 0,10$. On sait que $P(A\cup B\cup C)=0,155$, $P(A\cap B)=0,02$, $P(A\cap C)=0,03$ et $P(B\cap C)=0,01$. Quelle est la valeur de $P(A\cap B\cap C)$?

A) 0,035
B) 0,025
C) 0,015
D) 0,005
E) Tout est faux

Correction de BG : Réponse C

A) 0,035
B) 0,025
C) 0,015
D) 0,005
E) Tout est faux

On utilise **la formule de Poincaré** :

$P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(B \cap C)-P(C \cap A)+P(A \cap B \cap C)$

Donc $0,155 = 0,04+0,06+0,10-0,02-0,03-0,01+P(A \cap B \cap C)$
Donc $0,155 = 0,14 + P(A \cap B \cap C)$
Donc $P(A \cap B \cap C) = 0,015$

MERCI POUR VOTRE ATTENTION!