# Probabilités élémentaires et dénombrements

## Introduction

La **statistique** est un **ensemble de méthodes** permettant de décrire et d'analyser des observations (ou **données**). Ces observations consistent généralement en la mesure d'une ou plusieurs caractéristiques communes sur un ensemble de personnes ou d'objets équivalents = une **population**.

## Définitions

**Ensemble :** Liste ou collection d'objets définis. Ex : L'ensemble des tuteurs.

**Élément de l'ensemble** : Objet appartenant à l'ensemble. Ex : Votre tuteur préféré.

- On peut définir un ensemble en **extension** (= de manière **explicite**), en **listant** ses éléments un à un.
  Ex : A= {2 ; 4 ; 6 ; 8}.
- On peut définir un ensemble en **compréhension** ou en **intention** (= de manière **implicite**), selon les **propriétés** caractérisant ses éléments. Ex : A= {x : x est un nombre pair).

## Notions fondamentales :

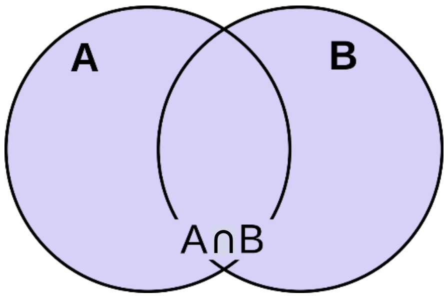
- Si x est un élément de l'ensemble **E**, alors x appartient à **E** **(x ∈ E)**.
- Si l'ensemble **B** est une partie de l'ensemble **A**, alors **B** est compris dans **A (B ∈ A).** Ex : B= {1 ; 2} est une partie de A= {1 ; 2 ; 3}.
- L'ensemble vide est noté **Ø**.
- L'univers est noté **Ω** (oméga).

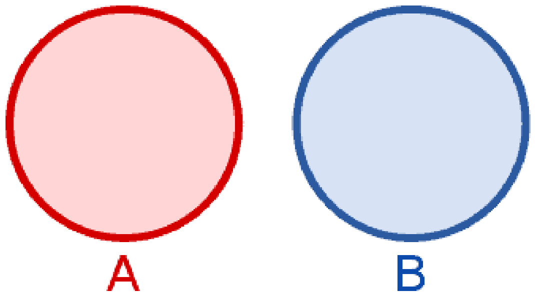
## Opérations

### I. L'intersection

L'intersection entre deux ensembles **A et B** se note **« A ∩ B »**, et signifie que l'on prend en compte le ou les **éléments** appartenant à la fois à **A et à B.**

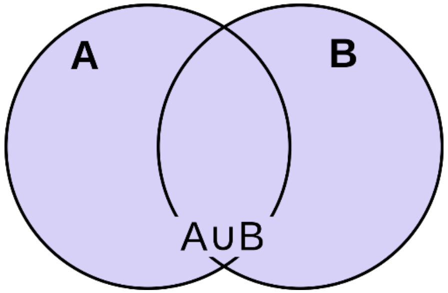
Lorsque **A ∩ B = Ø**, on dit qu'il n'y a pas de solution. Les ensembles **A** et **B** sont **disjoints**, aucun élément de **A** n'appartient à **B** et vice versa.



## II. La réunion

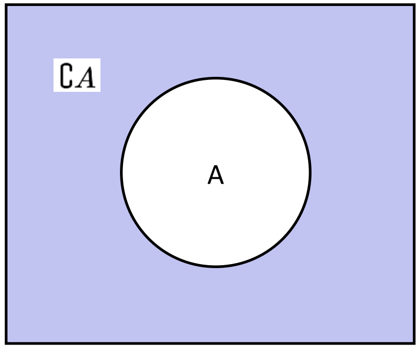
On note **« A ∪ B »** la réunion des ensembles **A** et **B**. Cette opération consiste à prendre en compte le ou les éléments appartenant **soit à A, soit à B, soit aux deux ensembles en même temps.**




**« A ∪ B » ⇔ A ou B**

## III. Le complémentaire

Le complémentaire d'un ensemble **A** est noté « ${}^{C}A,\ A^{C},\ \complement A$ », il représente **tout ce qui n'appartient pas** à l'ensemble en question.

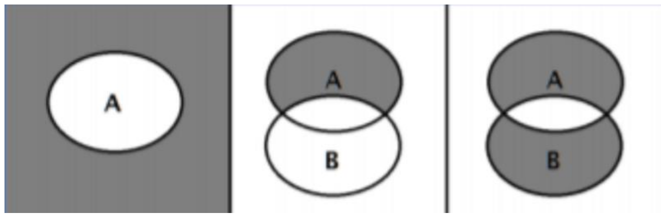



Propriétés :

- $\complement\Omega = \emptyset$
- $\complement\emptyset = \Omega$
- $(A^{C})^{C} = A$

## IV. Différence et différence symétrique

Ces deux opérations ont un nom similaire mais sont différentes. La **différence** est notée **A-B** et représente ce qui appartient à **A**, mais qui n'appartient pas à **B**. Elle est aussi appelée **complémentaire de B relatif à A**. La **différence symétrique**, elle, représente tout ce qui appartient à **A** ou à **B**, sans appartenir à **A ∩ B**. Elle correspond au **lien logique ou exclusif**. On la note **AΔB = AUB - A∩B**.




De gauche à droite :

Complémentaire, différence et différence symétrique.

## V. Opérations à comprendre

| | |
|---|---|
| $A \cup A = A$ | $A \cap A = A$ |
| $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |
| $A \cup B = B \cup A$ | $A \cap B = B \cap A$ |
| $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| $A \cup \varnothing = A$ | $A \cap \Omega = A$ |
| $A \cup \Omega = \Omega$ | $A \cap \varnothing = \varnothing$ |
| $A \cup \complement A = \Omega$ | $A \cap \complement A = \varnothing$ |
| $\complement\complement A = A$ | $\complement\Omega = \varnothing, \complement\varnothing = \Omega$ |
| $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ | $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ |

➢ Il est important de comprendre la logique derrière ces opérations sans forcément chercher à apprendre par cœur.

# Ensembles

## I. Les différents types d'ensembles

En statistiques, différents types d'ensemble existent. On retrouve ainsi :

| Ensembles finis | Ensembles infinis | |
|---|---|---|
| | **Dénombrables** | **Indénombrables** |
| Ensemble **nul**, ou contenant un **nombre fini** d'éléments).<br><br>*Ex : A = {1 ; 2 ; 3}* | Chaque éléments peut être **compté**<br><br>*Ex : l'ensemble des entiers naturels (1, 2, 3, 4, 5 …)* | On ne **peut pas compter** tous les éléments<br><br>*Ex : l'ensemble des réels (1, 1.1, 1.11, 1.111 …), on ne peut pas tout compter **car il y a une infinité de nombres entre 1 et 2** par exemple)* |

## II. Les ensembles produits

Soient deux ensembles : **A** et **B**. L'ensemble produit de **A** et **B** est l'ensemble des **couples ordonnés (a ; b)**, avec **a ∈ A** et **b ∈ B.** Pour calculer le nombre de couples possibles d'un ensemble produit, on fait :

**Card(A) * Card(B)**

avec Card(A) le nombre d'éléments de l'ensemble A et de même pour Card(B).

Ex :si A : {rouge ; bleu} et B : {1 ; 2 ; 3}, alors l'ensemble produit de A et B est {(rouge ; 1), (rouge ; 2), (rouge ; 3), (bleu ; 1), (bleu ; 2), (bleu ; 3)} ◊ 2 * 3 = **6 possibilités**.

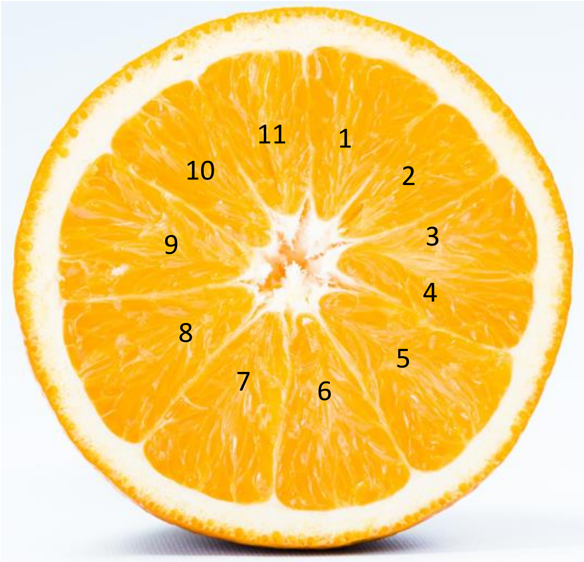
## III. Les familles d'ensembles

Soit l'ensemble **A = {1, 2, 3}**. Cet ensemble est constitué de différents sous-ensembles ({1}, {1, 2} …), et tous ces sous-ensembles forment la famille des parties de **A**. Un ensemble contenant **p éléments possède $2^p$ parties** (= sous-ensembles).

Ex : Soit A = {a ; b}, ici, la famille des parties de A est P(A) : {∅,{a},{b},{a, b}}, c'est-à dire toutes les « combinaisons » que l'on peut réaliser avec l'ensemble A.

## IV. La partition

Ici, la partition est la division de l'ensemble O en sous-ensembles disjoints (1, 2, 3…) dont la réunion forme O.




Et n'oubliez pas vos fruits et légumes en P1.

# Dénombrements

Les dénombrements permettent, en fonction des situations, de calculer le nombre de possibilités de tirages lors d'épreuves de probabilités. Il existe différentes formules à apprendre et à savoir appliquer en fonction du dénombrement à effectuer.

## I. La p-list avec remise

**La p-list avec remise** est utilisée lors des **tirages ordonnés avec remise**, c'est-à-dire que, par exemple, on tire une boule, on note le numéro, puis on la repose dans l'urne avant d'en tirer une nouvelle. Ainsi, **l'ensemble dans lequel on tire est toujours le même !**

La formule utilisée est **$Card(E)^p$**, avec Card(E) le nombre d'éléments de l'ensemble et p le nombre de tirages.

Ex : j'ai les 26 lettres de l'alphabet (Card(E) = 26) et je veux savoir combien de mots de 3 lettres je peux former … (p = 3) Il y $26^3$ mots possibles (« aaa », « aab », boa », « zyx » …), l'ordre compte et « aba » est différent de « baa » !

## II. L'arrangement de n éléments pris p à p

L'arrangement, lui, est utilisé pour les **tirages ordonnés sans remise** (= tirages successifs), dans ce cas, au lieu de reposer la boule dans l'urne**, on la garde avec nous et on retire dans un ensemble qui est donc légèrement différent** (il y a des boules en moins à chaque tirage).

Voici la formule : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$, **avec p le nombre de tirages et n le nombre d'objets de l'ensemble** (prononcé « arrangement de p éléments parmi n »).

**Explication du « n! » :**

- Pour tout n nombre entier naturel, le factoriel de n se définit par : n! = n * (n-1) * (n-2) * … * 1.
- Il existe un cas particulier à retenir : 0! = 1.
- Exemple : 4! = 4*3*2*1=24.

Ex : j'ai les 26 lettres de l'alphabet (n = 26), et je veux savoir combien de mots de 3 lettres (p = 3) je peux former. Ici, chaque lettre est utilisable UNE SEULE FOIS (tirage sans remise) :

$$A_{26}^3 = \frac{26!}{(26-3)!} = \frac{26!}{23!} = 24 * 25 * 26 = 15\ 600.$$

## III. L'arrangement avec répétition

Celui-ci est similaire à la p-liste avec remise, il est donc utilisé lors des **tirages ordonnés avec remise**. Ainsi, si on tire x fois parmi n éléments, la formule est **: $n^x$**. Finalement, si on regarde les formules et les utilisations, la p-liste et l'arrangement avec répétition c'est le même calcul dans la même situation.

Ex : Si on tire dans un paquet de 52 cartes une carte, qu'on la repose, qu'on en tire une autre, (donc x=2), il y a $52^2$ possibilités de tirages !

## IV. Permutation d'un ensemble fini à n éléments

La permutation est utilisée pour les **tirages ordonnés sans remise**. Elle est donc semblable à l'arrangement de n éléments pris p à p, mais lorsque **p est égal à n** (le nombre d'objets tirés est le même que le nombre d'objets total). En d'autres termes, c'est donc un tirage ordonné de tous les éléments de l'ensemble. La formule, est la suivante : **n!**, avec n le nombre d'éléments de l'ensemble.

Ex : Vous disposez de 4 cartes (I, N, T, E), vous vous demandez combien de mots de 4 lettres vous pouvez former mais en utilisant qu'une fois chaque lettre (à chaque tirage) : → 4! = 24.

## V. Permutation avec répétition

Ce dénombrement est utilisé lors des **permutations d'un ensemble**, lorsque plusieurs éléments de l'ensemble appartiennent à une même catégorie (k1, k2, k3 … kx) et qu'**on ne considère que la catégorie pour l'ordre**. Pour calculer le nombre de combinaisons, on fait :

$$\frac{n!}{k1! * k2! * k3! * \ldots * kx!}$$

avec n le nombre d'éléments de l'ensemble et k les nombres d'éléments par catégorie.

Ex : une urne contient 5 boules rouges, 3 noires, 4 bleues et 2 vertes. Combien existe-il d'ordre de tirage en prenant en compte uniquement la couleur des boules ? → $\frac{14!}{5!*3!*4!*2!}$

## VI. La combinaison de n éléments pris p à p

Enfin, la combinaison est utilisée lors des **tirages non ordonnés sans remise (= tirages simultanés)**, c'est-à-dire que l'on va tirer par exemple trois boules d'un coup et regarder lesquelles on a eu. L'ordre ne compte donc pas, ici « bleue-bleue-rouge » est similaire à « rouge-bleue-bleue ».

**Voici la formule des combinaisons de n éléments pris p à p** :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

avec n le nombre d'éléments de l'ensemble et p le nombre d'éléments tirés.

Ex : en tirant au hasard 4 cartes d'un coup dans un paquet de 54 cartes, combien de combinaisons sont possibles ?

$\rightarrow C_{54}^4 = \frac{54!}{4!(54-4)!}$

**Et voici un beau tableau qui sauvera vos séances qcm :**

| Avec remise | | Sans remise | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ordonné | | Ordonné | | | Non ordonné |
| p-liste avec remise | Arrangements avec répétition | Arrangements de n éléments pris p à p | Permutation d'un ensemble fini à n éléments | Permutations avec répétition | Combinaisons de n éléments pris p à p parties d'un ensemble |
| On prend 1 élément dans E, on le remet et on répète p fois | On prend 1 élément dans n, on le remet et on répète p fois | On prend SUCCESSIVEMENT (=les uns après les autres) p éléments parmi n sans remettre | On prend les éléments 1 à 1 sans les remettre jusqu'à épuisement p = n | On prend les éléments 1 à 1 jusqu'à épuisement en ne tenant compte que des catégories | On prend SIMULTANEMENT (=tous en même temps) p éléments parmi n |
| $(\text{Card } E)^p$ | $n^p$ | $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ | $n!$ | $\frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_x!}$ | $C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$ |

# Eléments de probabilité

## I. Introduction et définitions

Il existe deux types de phénomènes : **les phénomènes déterministes**, dont l'issue est prévisible (comme par exemple les lois de physique), et **les phénomènes aléatoires**, dont l'issue n'est pas prévisible (cela peut être un lancer de dé par exemple).

Une **expérience aléatoire** (ou **épreuve**) est une expérience dont le résultat n'est pas prévisible, c'est donc un **phénomène aléatoire**.

En probabilités, on travaille dans un ensemble fondamental (noté Ω) qui représente **l'ensemble de tous les résultats possibles**. Un **évènement**, quant à lui, est un **sous-ensemble de l'ensemble fondamental**.

Ex : l'ensemble fondamental peut être « Les résultats d'un lancer de dé », et un évènement de cet ensemble peut être « Obtenir un chiffre pair ».

Il existe plusieurs types d'événements :

- **L'évènement élémentaire** : constitué uniquement **d'un seul résultat** de l'ensemble. Ex : « Obtenir un 6 » lors d'un lancer de dé.
- **L'événement impossible ou ensemble vide** (ne contient aucun résultat possible) Ex : obtenir un 7 à un lancer de dé.
- **L'événement certain** : l'ensemble contient tous les résultats possibles Ex : obtenir un chiffre entre 1 et 6 en lançant le dé.

## II. Probabilités

Une probabilité associe à un évènement un nombre allant de **0 à 1**, elle permet de mesurer **la chance de réalisation de l'évènement** en question. Il y a quelques subtilités à connaître à propos des probabilités :

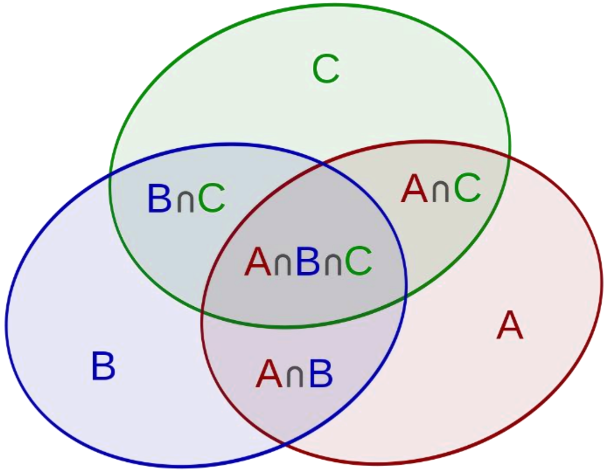
- **P(ø) = 0**, ce qui signifie que **l'évènement impossible ne peut pas se produire.**
- **P(Ω) = 1.**
- Si **P(A ∩ B) = 0**, alors A et B **s'excluent mutuellement, ils sont dits incompatibles**. Cela signifie que les deux évènements **ne peuvent pas se produire en même temps** (par exemple, on ne peut pas obtenir pile et face lorsqu'on lance une pièce). Dans ce cas-là, **P(A ∪ B) = P(A) + P(B).**
- **$P(\bar{A})$=1-P(A).**
- Si A est inclus dans B, alors **P(A) ≤ P(B)** (car A une partie de B).
- **P (A ∪ B) = P (A) + P(B) – P(A∩B)** = **théorème des probabilités totales**.
- Si A et B sont incompatibles, **A ∩ B = ∅** donc **P(A ∪ B) = P(A) + P(B).**

**La propriété d'additivité forte / formule de Poincaré / formule d'inclusion-exclusion / formule de crible**

(synonymes d'une même propriété)

Cette propriété permet de connaître la formule lorsque l'on veut calculer une union entre plusieurs évènements. Elle est généralisable à n'importe quel nombre n d'ensembles. Pour n = 3, elle donne :

**$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$**




Ici on veut connaitre la probabilité des trois évènements ensemble. On additionne donc leurs différentes probabilités, puis on enlève les intersections (qui sont de trop). Cependant, en enlevant les trois intersections, on laisse un « trou » au milieu, d'où le rajout de l'intersection des 3 évènements en même temps.

## III. Equiprobabilité

Lors d'une situation d'équiprobabilité, **chaque évènement élémentaire a la même probabilité** (c'est comme au loto, chaque boule a autant de chance que les autres d'être tirée). Dans ce cas-là, la probabilité d'un évènement A est :

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

avec Card(A) le « nombre de cas favorables » et Card(Ω) le « nombre de cas possibles ».

Ex : Dans une urne, il y a 15 boules, dont 7 bleues. L'évènement A est « tirer une boule bleue », P(A) = 7/15.

## IV. Probabilités : ensemble fini

Lorsque l'on travaille sur un ensemble fini, la probabilité de l'évènement est **comprise entre 0 et 1**. De plus, la somme des probabilités de tous les évènements est **toujours égale à 1**.

Ex : considérons un dé biaisé : P(1) = 1/3, P(2) = 1/6, P(3) = 1/12, P(4) = 1/12, P(5) = 1/4.

Trouver P(6) = ?

1/3 + 1/6 + 1/12 + 1/12 + 1/4 + ? = 1 → ? = 1 – 11/12 = 1/12

## V. Probabilités : ensemble infini

Le prof ne donne aucune importance à cette partie (depuis des années), je vous laisse la formule qui est donnée en cours sans explication : $p_i \geq 0$ $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$ .

Dédi à mes co-tuts, à mes vieux, à mes potes et aux fans de biostats <3.