Probabilités conditionnelles, théorème de Bayes & indépendance en probabilités

Définitions de base :

Ω Ensemble fondamental, l'univers : P(Ω)=1 cela représente 100% des évènements, la probabilité est certaine. Ex : tout l'amphi Petit Valrose.

P(A) : Probabilité de l'événement A. Ex : Probabilité qu'un étudiant en PACES de Nice aime les gâteaux.

P(Ā) ou P(∁A) : Probabilité de l'événement contraire de A, c'est-à-dire ne pas avoir A. On peut dire aussi que Ā c'est l'univers moins l'événement A. On peut obtenir cette probabilité en faisant $P(\bar{A}) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$. Ex : Probabilité qu'un étudiant en PACES de Nice n'aime **pas** les gâteaux.

P(A∩B) = P(B∩A) : Probabilité de A et de B = Probabilité de B et A (c'est pareil 😉) ou probabilité de A inter B (car c'est l'intersection de l'évènement A et B). Ex : Probabilité qu'un étudiant en PACES de Nice aime les gâteaux et la biostat' ♥

I. Probabilités conditionnelles

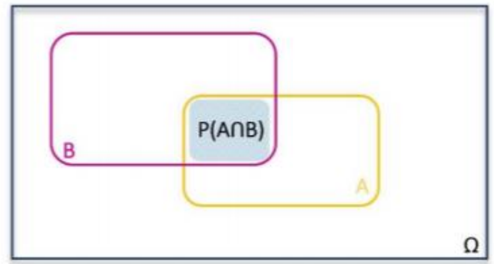
1. Introduction

Définition : Une probabilité conditionnelle s'intéresse à la probabilité de réalisation d'un événement A **à condition** qu'un autre événement B **ait déjà été réalisé**.

Remarque : Ainsi on s'intéresse seulement aux évènements A réalisés parmi les événements B réalisés et non plus parmi tout l'univers.
Notation : $P(A|B)=P_B(A)$ Probabilité de A sachant B réalisé.

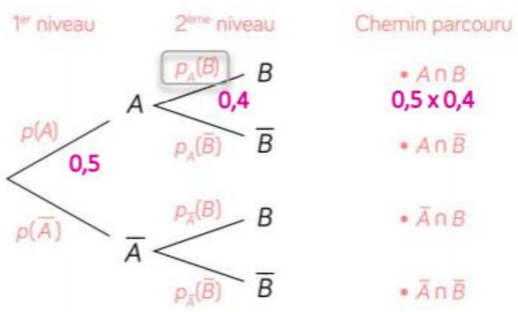
Attention : **P(A|B) ≠ P(A∩B)** ↬ Les probabilités conditionnelles sont **à distinguer** des probabilités d'une intersection !
Schémas : les carrés représentent des événements

1)



2)

3)



1) P(A∩B) (probabilité d'une intersection) on regarde sur tout l'univers Ω, car on cherche la probabilité d'A ET B sur l'univers.
2) P(A|B) (probabilité conditionnelle) on regarde parmi la population B seulement, car on cherche la probabilité de A PARMI B. On restreint Ω à B.
3) Sur cet arbre on voit que la probabilité conditionnelle est entourée.

2. Formule de la probabilité conditionnelle

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \text{ ou } P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Exemple : La probabilité qu'un PACES ait perfecté la biostat sachant qu'il a assisté à tous les cours est égale au nombre de PACES qui ont perfecté la biostat et assisté à tous les cours sur le nombre de PACES qui ont assisté à tous les cours !

3. Théoreme de la multiplication

<u>On sait que</u> : $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \leftrightarrow P(A\cap B)=P(A|B)*P(B)$

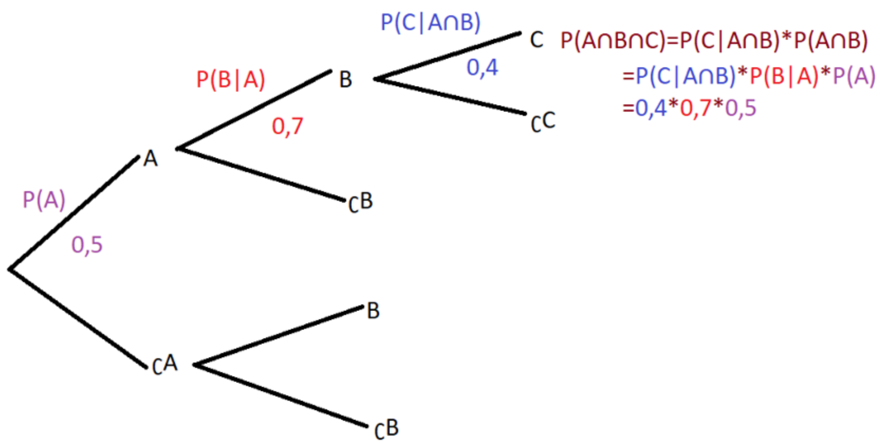
<u>Donc</u> : **P(A∩B)=P(B∩A)=P(A|B)*P(B)=P(B|A)*P(A)**

<u>Remarque</u> : En UE4 il est important de savoir le nom du théorème de la formule qu'on utilise 😉

Remarque bis : Le théorème peut se généraliser pour plus de deux événements de la manière suivante :

$$P(A_1 \cap A_2 ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)\dots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{n-1})$$

Schéma : On cherche la probabilité d'avoir l'événement A, B et C!



Exemple pour mieux comprendre : On a une boite de 10 pâtisseries avec 5 croissants, 2 pains au chocolat et 3 tartes au citron. On veut connaitre la probabilité de tirer 3 croissants d'affilé dans une boite neuve. A : tirer un premier croissant / B : tirer un deuxième croissant / C : tirer un troisième croissant

On a donc $P(A) = \frac{5}{10} = 0{,}5$; $P(B|A) = \frac{5-1}{10-1} = \frac{4}{9}$; $P(C|A \cap B) = \frac{4-1}{9-1} = \frac{3}{8}$

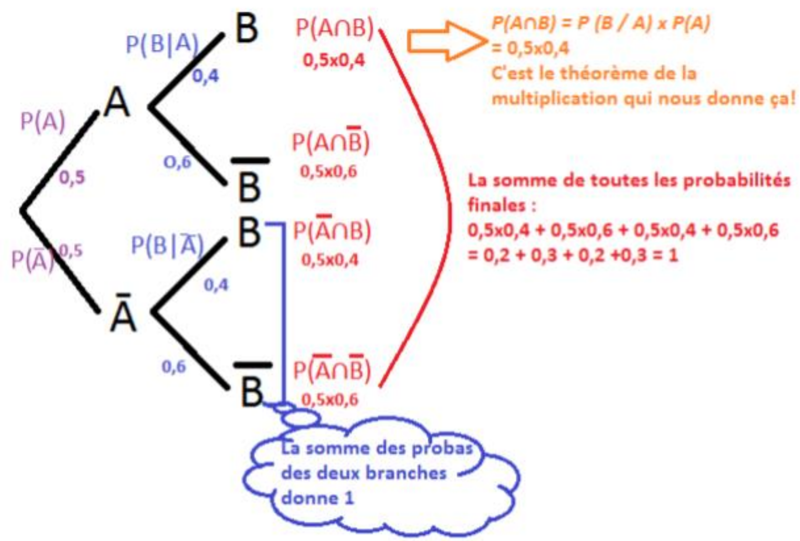
$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B) = \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{12}$

Donc on a 1/12 de chance de tirer 3 croissants d'affilé !

II. Diagramme en arbre

<u>Définition</u> :
- Soit une suite finie d'événements quand une expérience dépend du résultat de l'expérience passée ce sont des **probabilités conditionnelles**.
- On utilise les **arbres** pour illustrer les situations !

1. Selon le **théorème de la multiplication** la probabilité d'un chemin est le **produit** de chaque branche du chemin !
2. Les chemins **s'excluent** mutuellement.
3. La **somme** de toutes les probabilités des finalités **doit être 1**.



Exemple : Si l'événement A considéré est « avoir plus de 20 ans » et l'événement B « être blond ». Le chemin 1 : P(A∩B) est « avoir plus de 20 ans ET être blond ». Le chemin 2 est : P(A∩ B̄) est « avoir plus de 20 ans ET ne pas être blond », On comprend bien qu'un chemin est exclusif, les deux chemins ne sont pas compatibles !

III. Formule et théorème de Bayes

1. Formule de Bayes

Définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ ou } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

+

Théorème de la multiplication :

P(A∩B) = P(B∩A) = P(A|B)*P(B) = P(B|A)*P(A)

=

Formule de Bayes :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) * P(A)}{P(B)}$$

Remarque : Ainsi à partir de la définition de la proba conditionnelle et du théorème de la multiplication en remplaçant dans les formules on trouve la formule de Bayes!

Exemple d'application de la formule de Bayes 😉 :

Dans une classe on a 20 élèves. On a 15 élèves droitiers et le reste des élèves est gaucher. On sait aussi que 12 d'entre eux ont les yeux marrons, 4 ont les yeux bleus et le reste a les yeux verts. Parmi les gauchers, 4 ont les yeux marrons, et celui restant a les yeux bleus. On veut savoir quelle est la probabilité si on tire un élève au hasard parmi ceux qui ont les yeux marrons de tomber sur un gaucher.

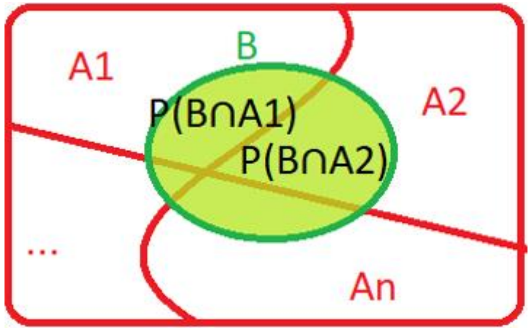
A : être gaucher / B : avoir les yeux marrons

On a : P(A) = 5/20 et P(B) = 12/20 et P(B|A) = 4/5

D'après la formule de Bayes on a donc : $P(A|B) = \frac{P(B|A) * P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{5} * \frac{5}{20}}{\frac{12}{20}} = \frac{1}{3}$

2. Théorème de Bayes

Introduction : Soit un univers Ω formé par un ensemble d'événements de A1 à An. On dit que cet ensemble d'événements de A1 à An constitue une partition de Ω.



On a un ensemble d'événements de A1 à An dont **l'union forme Ω**.
C'est une illustration du **théorème des probabilités totales** :
P(B) = P(B∩A1) + P(B∩A2) + … + P(B∩An)

Théorème des probabilités totales :

P(B) = P(B∩A1) + P(B∩A2) + … + P(B∩An)

+

Théorème de la multiplication :

P(B∩An) = P(B|An)*P(An)

=

P(B) = P(B|A1)*P(A1) + P(B|A2)*P(A2) + … P(B|An)*P(An)

+

Formule de Bayes :

$$P(An|B) = \frac{P(B|An) * P(An)}{P(B)}$$

=

Théorème de Bayes :

$$P(An|B) = \frac{P(B|An) * P(An)}{P(B|A1) * P(A1) + P(B|A2) * P(A2) + \cdots + P(B|An) * P(An)}$$

IV. Evénements indépendants

1. Introduction

Définition : Deux événements sont **indépendants** si $P(B \cap A) = P(A) \times P(B)$. Les événements sont indépendants dans la mesure où la probabilité de réalisation de A **ne change pas** avec la réalisation de B.
Soit $\mathbf{P(A|B)=P(A)}$ et $\mathbf{P(B|A)=P(B)}$!

Conséquences :
- A et $\overline{B}$ sont indépendants.
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.
- $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Cas de trois événements : Soient A, B et C.
S'ils sont **indépendants deux à deux** (A indépendant de B, A indépendant de C et C indépendant de B). Et si $\mathbf{P(A \cap B \cap C)=P(A) \times P(B) \times P(C)}$, alors ces trois événements sont **indépendants** !
*Remarque : La seconde condition n'est **pas une conséquence** de la première. C'est à-dire que les trois événements peuvent être indépendants deux à deux mais on peut avoir : $P(A|B \cap C) \neq P(A)$.*

2. Indépendance et inclusion

Définition : $A \subset B$: A est **inclus** dans B ⇢ $\mathbf{P(A \cap B) = P(A)}$
*Remarque : On a $P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A)$ avec la proba de **B sachant A égale à 1**, car A étant inclus dans B on est **certain** d'avoir B !*
Exemple : A : « être blond » B : « avoir les cheveux clairs », les deux ne sont pas indépendants et A est inclus dans B.

Conséquences :
Formule de Bayes quand $A \subset B$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

Formule de Bayes quand $B \subset A$:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)}$$

Attention : A et B ne sont PAS indépendants !

3. Indépendance et exclusion

Définition : $(A \cap B) = \varnothing$; $P(A \cap B) = 0$: A et B sont **exclusifs / disjoints / incompatibles**
→ $P(A|B) = P(B|A) = 0$
Exemple : A : « être majeur » B : « être mineur », les deux ne peuvent pas se produire en même temps ils sont incompatibles.

/!\ A et B ne sont **PAS** indépendants /!\

/!\ A ne pas confondre /!\	
Incompatibles=exclusifs=disjoints	**Indépendants**
Ne fait PAS intervenir leur probabilité	Liés à leur probabilité
Ne peuvent PAS se produire en même temps	Peuvent se produire en même temps (*la réalisation d'un n'influençant pas l'autre*)
Défini par : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ Donne : $\mathbf{P(A \cap B)=0}$	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$