PROBABILITÉS ÉLÉMENTAIRES & DÉNOMBREMENTS

I- Définitions

Ensemble: liste ou collection d'objets définis (ex: les étudiants en PACES)
Element de l'ensemble: objet appartenant à l'ensemble (ex: vous meme au sein de l'ensemble "étudiants en PACES")

L'ensemble peut se définir en **extension** (=explicite): on <u>liste tous les éléments</u> un à un (ex: A=(a, b, c, d, e))

L'ensemble peut se définir en **comprehension** (=implicite): on <u>donne des propriétés</u> caractérisant les éléments (ex: B=(x : x est une voyelle))

Les notions de base

Dire que p est un **élément** de **l'ensemble** A signifie que **p appartient à A** ($p \in A$). (ex : 1 appartient à l'ensemble A : {1 ; 2 ; 3}.)

Dire que l'ensemble B est une **partie** de l'ensemble A signifie que B est compris dans A ($B \subset A$). (ex : B : {1 ; 2} est une partie de A : {1 ; 2 ; 3})

L'ensemble vide est noté $\emptyset$.

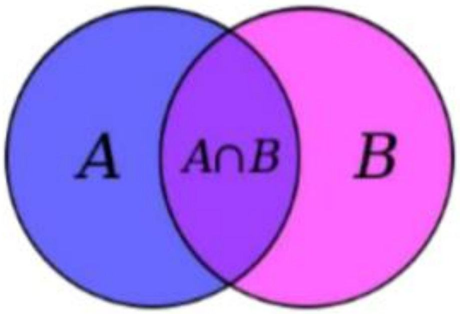
L'univers est noté Ω (oméga)

II- OPÉRATIONS

L'intersection

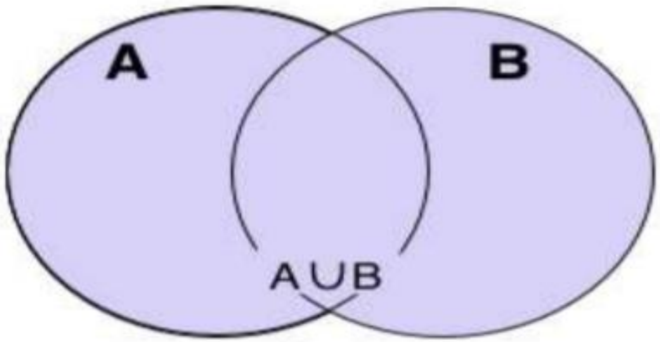
Cette opération se note **«A∩B»** (A et B sont deux ensembles). L'élément appartient à la fois à A ET à B.

Il existe un cas particulier où A∩B = ∅, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de solution. Dans ce cas, les deux ensembles sont dits « disjoints ».



La reunion

Cette opération se note **«A∪B»**. Elle signifie que l’élément appartient soit **à A**, soit **à B**, soit **aux deux** en même temps.



Le complémentaire

Noté **∁A ou Ā**, le complémentaire représente tout ce qui **n'appartient pas** à l'ensemble en question.

Donc : $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ de même : $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$

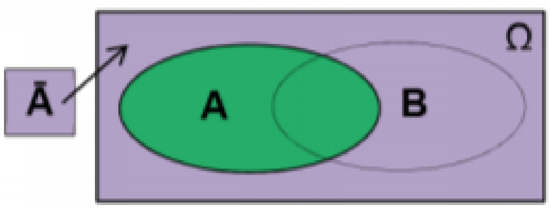
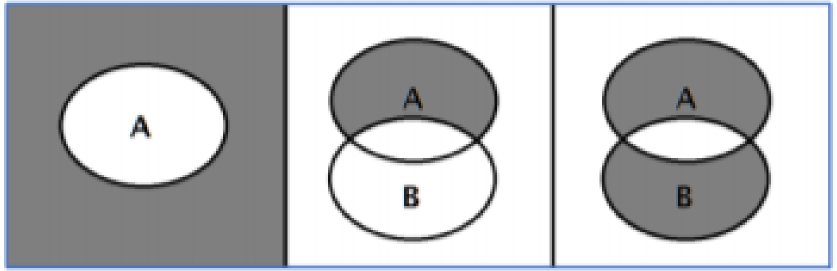


Schéma du complémentaire de A

Différence & différence symétrique

La différence est tout simplement notée **A-B** et représente ce qui **appartient à A**, mais qui **n'appartient pas à B**. C'est le complémentaire de B relatif à A.
La différence symétrique **AΔB** représente tout ce qui **appartient à A ou à B, sans appartenir à A∩B**. Elle correspond au lien logique ou exclusif.

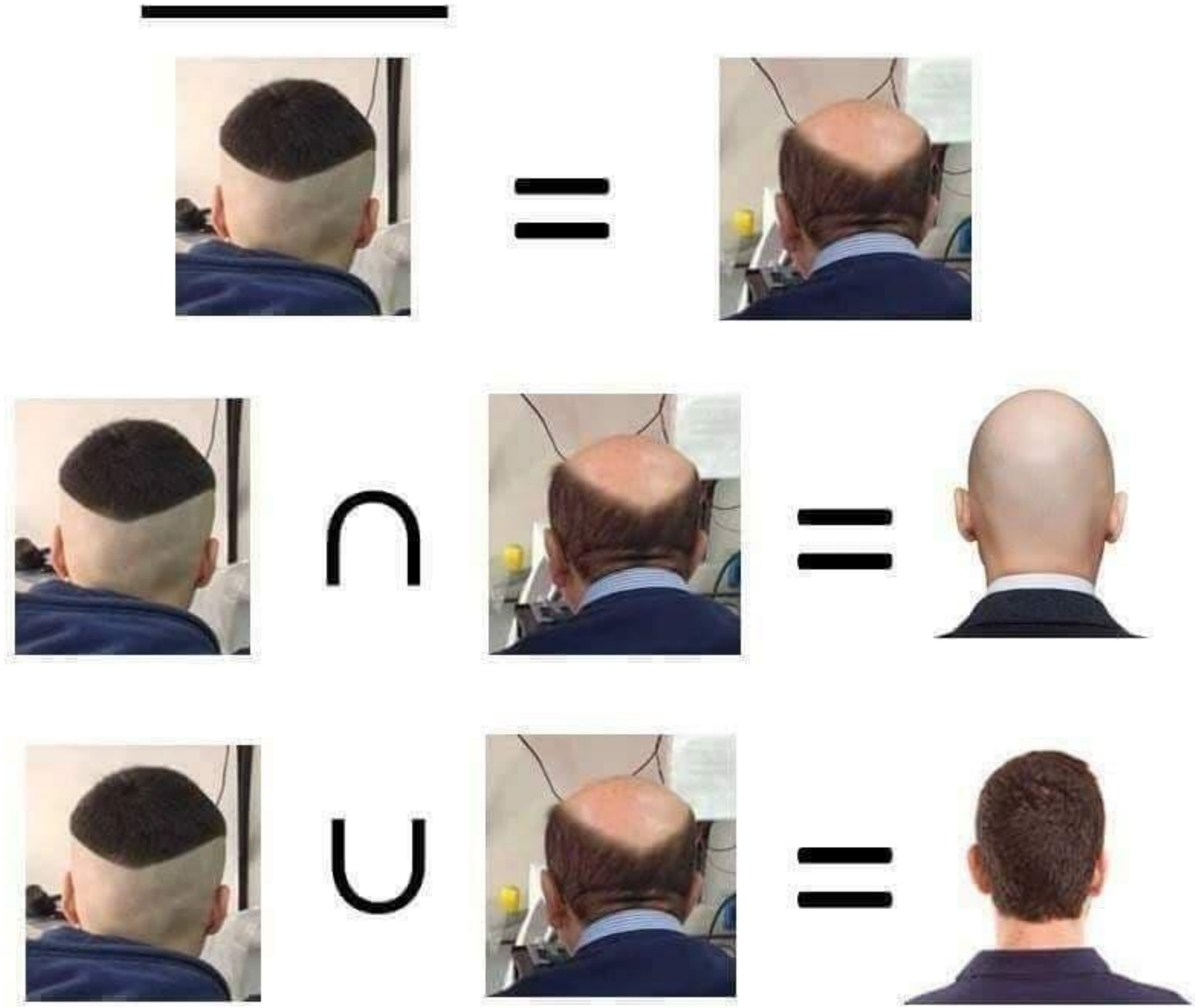


Schémas de gauche à droite : complémentaire, différence et différence symétrique.

Opérations importantes

$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \Omega = A$
$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
$A \cup \complement A = \Omega$	$A \cap \complement A = \varnothing$
$\complement\complement A = A$	$\complement\Omega = \varnothing, \complement\varnothing = \Omega$
$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$	$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$

Attention! Tableau à comprendre et non pas à apprendre



III-Les ensembles

Les différents types d'ensembles

Les ensembles **finis** (c'est un ensemble nul, ou contenant un nombre fini d'éléments). (ex : A = {1 ; 2 ; 3}, A= {Ø})

Les ensembles **infinis** (dénombrables ou indénombrables):

(Ex : l'ensemble des entiers naturels (1, 2, 3, 4, 5 …) = **dénombrable**

(Ex : l'ensemble des réels (1, 1.1, 1.11, 1.111 …), on ne peut pas tout compter car il y a une infinité de nombres entre 1 et 2 par exemple) = **indénombrable**

Les ensembles produits

Soient deux ensembles : A et B. L'ensemble produit de A et B est l'ensemble des **couples ordonnés (a ; b)**, avec a ∈ A et b ∈ B. Pour calculer le **nombre de couples** possibles d'un ensemble produit : **Card(A) * Card(B)** avec Card(A) le nombre d'éléments de l'ensemble A.

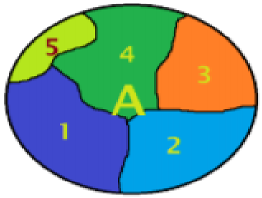
(ex : si A : {rouge ; bleu} et B : {1 ; 2 ; 3}, alors l'ensemble produit de A et B est {(rouge ; 1), (rouge ; 2), (rouge ; 3), (bleu ; 1), (bleu ; 2), (bleu ; 3)} à 2 * 3 = 6 possibilités.)

Les familles d'ensemble & la partition

Soit l'ensemble A = {1, 2, 3}. Cet ensemble est constitué de **différents sous-ensembles** ({1}, {1, 2} …), et tous ces sous-ensembles forment la **famille des parties** de A. Un ensemble contenant p éléments possède $\mathbf{2^p}$ **parties** (= sous-ensembles).

(ex : Soit A = {a ; b}, ici, la famille des parties de A est P(A) : {Ø,{a},{b},{a,b}}, c'est-à-dire toutes les «combinaisons» que l'on peut réaliser avec l'ensemble A.)

La **partition** est la division de l'ensemble A en sous-ensembles **disjoints** dont la **réunion forme A.**



Ce schéma représente une partition de l'ensemble A

QRU RÉCAP

A propos des probabilités élémentaires et les ensembles :

A- P(∁∅)=Ω
B- Dans l'ensemble explicite (=en intention) on liste tous les éléments un à un
C- Les ensembles finis sont dénombrables ou indénombrables
D- Un ensemble avec 5 éléments possède 32 sous parties
E- tout est faux

CORRECTION : RÉPONSE D

A propos des probabilités élémentaires et les ensembles, donnez LA réponse vraie :

A- $P(\complement\emptyset)=P(\Omega)=1$
B- L'ensemble explicite est en extension!
C- C'est les ensembles infinis, les ensembles finis ne sont pas indénombrables
D- Il y a 2^5 sous parties, ce qui fait bien 32
E- tout est faux

IV- DÉNOMBREMENTS

p-liste avec remise

Tirages ordonnés avec remise

La formule utilisée est **$Card(E)^p$** , avec Card(E) le nombre d'éléments de l'ensemble et p le nombre de tirages.

(ex : j'ai les 26 lettres de l'alphabet (Card(E) = 26) et je veux savoir combien de mots de 3 lettres je peux former…
Il y 26^3 mots possibles (« aaa », « aab », « boa », « zyx » …), l'ordre compte et « aba » est différent de « baa » !)

Arrangements avec repetition

Tirages ordonnés avec remise.

La formule est $\mathbf{n^x}$ avec n le nombre d'éléments et x le nombre de tirages

Si on regarde les formules et les utilisations, **la p-liste et l'arrangement avec répétition c'est pareil** !

(ex : on tire dans un paquet de 52 cartes une carte, on la repose (dans le paquet), on en tire une autre, il y a 52^2 possibilités de tirages !)

Arrangements de n éléments pris p à p

Tirages ordonnés sans remise $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

p = nombre de tirages / n = nombre d'éléments

Récap factoriels:
n! se prononce « n factoriel » et n!=n*(n-1)*(n-2)…*1
(ex: 5!=5*4*3*2*1) et **attention**, 0!=1

Ex: en utilisant chaque lettre de l'alphabet une fois, combien de mots a 5 lettres peut on faire?

$$A_{26}^{5} = \frac{26!}{(26-5)!} = 26 * 25 * 24 * 23 * 22 = 7893600$$

Permutation d'un ensemble fini à n éléments

Tirage ordonnés sans remise

La permutation **ressemble à l'arrangement** de n éléments pris p à p, mais s'utilise lorsque **n=p**, donc il y a tirage **jusqu'à épuisement**.
La formule est donc **n!** parce que :

$$\frac{n!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-n!)} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Permutations avec repetition

Utilisé lors des **permutations d'un ensemble**, lorsque plusieurs éléments de l'ensemble appartiennent à une **même catégorie** (k_1, k_2, k_3 … k_x) et qu'**on ne considère que la catégorie** pour l'ordre

$$\frac{\mathbf{n}!}{\mathbf{k1}! * \mathbf{k2}! * \cdots * \mathbf{kn}!}$$

(ex : une urne contient 5 boules rouges, 3 noires, 4 bleues et 2 vertes. Combien existe-il d'ordre de tirage en prenant en compte uniquement la couleur des boules ?)

$$\rightarrow \frac{14!}{5!*3!*4!*2!}$$

Combinaison de n éléments pris p à p

Tirages non ordonnés sans remise (= tirages simultanés)

$$C_n^p = \frac{n\,!}{p\,!(n-p)\,!}$$

Je tire au hasard 6 boules dans une urne de 24 boules, combien de combinaisons de boules sont possibles?

$$\rightarrow C_{24}^{6} = \frac{24\,!}{6\,!(24-6)\,!}$$

Pause QRU!

Après une dissection en labo d'anatomie, SLAASH, passionnée par le tissus osseux, décide de voler 12 os à un cadavre. Sachant qu'il y a 206 os dans le corps humain et SLAASH ne prend pas l'ordre en compte, combien de tirages différents des 12 os existe-t-il?

A) On utilise la permutation avec répétition

B) $C_{206}^{12} = \frac{206\,!}{12!(206-12)\,!}$

C) Il y a 206^{12} possibilités

D) $A_{206}^{12} = \frac{206\,!}{(206-12)\,!}$

E) Tout est faux

Correction:

A) Faux: l'ordre ne compte pas et on n'a pas de catégories

B) Vrai: c'est un tirage non ordonné (SLAASH ne prend pas l'ordre en compte) et sans remise (elle va pas remettre les os dans le cadavre…)
-> COMBINAISON

C) Faux: c'est l'arrangement avec répétition, mais il nous faut la combinaison ici

D) Faux: l'ordre ne compte pas, donc pas d'arrangement!

E) Faux

V-ELEMENTS DE PROBABILITÉS

Définitions

Phénomène **déterministe** : dont l’issue est **prévisible**

Phénomène **aléatoire** (=expérience aléatoire) : dont l’issue n’est **pas prévisible**

L’ensemble **fondamental** (Ω) représente l’ensemble de **tous les résultats** possibles

Un évènement, quant à lui, est un **sous-ensemble** de l’ensemble fondamental

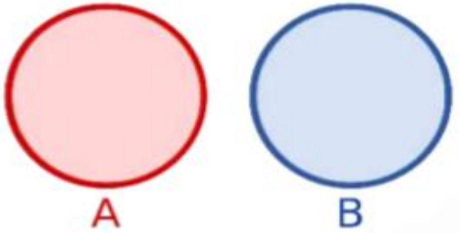
Un événement élémentaire est constitué d’**un seul** résultat de l’ensemble

L’ensemble vide ø est un évènement **impossible**.

Probabilités

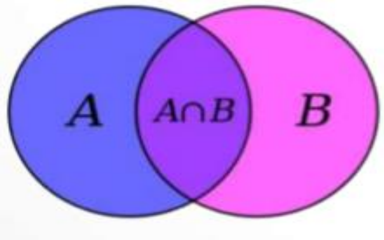
Une probabilité est un nombre allant de **0 à 1** pour mesurer la chance de réalisation de l'événement

P(ø) = 0, ce qui signifie que l'événement ne peut pas se produire et **P Ω= 1**



Si **P(A ∩ B) = 0**, alors A et B **s'excluent mutuellement**, ils sont dits **incompatibles**. Les deux évènements ne peuvent pas se produire en même temps. Dans ce cas-là, **P(A ∪ B) = P(A) + P(B).**

P (A ∪ B) = P(A)+P(B)–P(A∩B) = théorème des probabilités totales



Un QRU sauvage apparait!

On considère les évènements A et B. $P(A)=0,5$, $P(B)=0,6$ et $P(A \cup B)=0,7$. Quelle est la valeur de $P(A \cap B)$?

A) 0,3
B) 1,1
C) 0,4
D) 1,8
E) 0,21

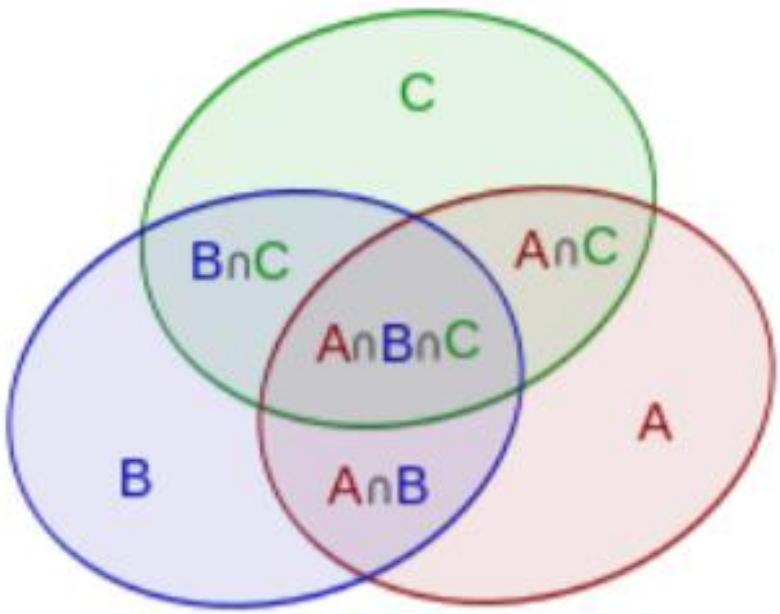
Correction

A) Faux
B) Faux
C) Vrai, $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,5 + 0,6 - 0,7 = 0,4$
D) Faux
E) Faux

La propriété **d'additivité forte** ou formule **de Poincaré** ou **d'inclusion-exclusion** ou **de crible**.

Pour n=3 :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$



Equiprobabilité

Lors d'une situation d'équiprobabilité, chaque évènement élémentaire a la même probabilité

Dans ce cas-là, la probabilité d'un évènement A est :
$P(A)=Card(A)/Card(\Omega)$

Ex : Dans une urne, il y a 15 boules, dont 7 bleues.
L'évènement A est « tirer une boule bleue », $P(A) = 7/15$.

ET C'EST FINI, MERCI POUR VOTRE ATTENTION!