VARIABLES ALÉATOIRES, LOIS DE PROBABILITÉ DISCRETE ET CONTINUE

Plan

I- Définition

II- Variable aléatoire discrète

III- Lois de probabilité discrète

IV- Variable aléatoire continue

V- Lois de probabilité continue

I- Définition

- **Une variable aléatoire est une épreuve menant à des évènements élémentaires qui sont des nombres**

Si le résultat fait partie d'un ensemble fini, alors c'est une variable aléatoire discrète

Si le résultat fait partie de $\mathbb{R}$ ou d'un intervalle de $\mathbb{R}$, alors c'est une variable aléatoire continue (ou variable à densité)

II- Variable Aléatoire Discrète

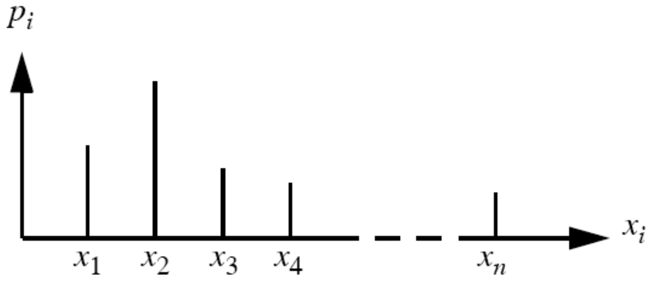
- La loi de probabilité d'une variable aléatoire X discrète est définie en donnant l'ensemble des valeurs *(p1, p2, p3, …, pn)* qui sont les probabilités de ses différentes éventualités *(x1, x2, x3, …, xn)*

soit $\quad p_i = P(X = x_i)$

donc $\quad 0 \leq p_i \leq 1 \quad et \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

- On peut représenter cette loi de probabilité par une table ou un diagramme en bâtons:

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$



A) Moyenne μ

- La moyenne μ de la variable aléatoire X est la valeur moyenne des résultats que l'on obtiendrait en répétant indéfiniment l'épreuve

$$\mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i$$

C'est un indicateur de <u>position</u>

B) ESPERANCE E(X)

- L'espérance E(X) c'est la moyenne, mais en statistiques. Elle traduit la tendance centrale de la variable aléatoire

1. Soit X une v-a et k une constante réelle ($k \in \mathbb{R}$). On a :
$E(kX) = kE(X)$
$E(X + k) = E(X) + k$

2. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace fondamental. On a :
$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

C'est un indicateur de *<u>position</u>*

C) Variance & Écart-type (σ² & σ)

- La variance σ² est la moyenne des carrés des écarts entre X et sa moyenne μ

- L'écart-type σ de la distribution est la racine carrée de la variance

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i - \mu)^2$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \mu^2$$

C'est un indicateur de <u>dispersion</u>

D) Variable Centrée Réduite

- Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et de variance σ^2

   On définit la variable : $$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

- Y est une variable centrée réduite avec:

   E(Y) = 0

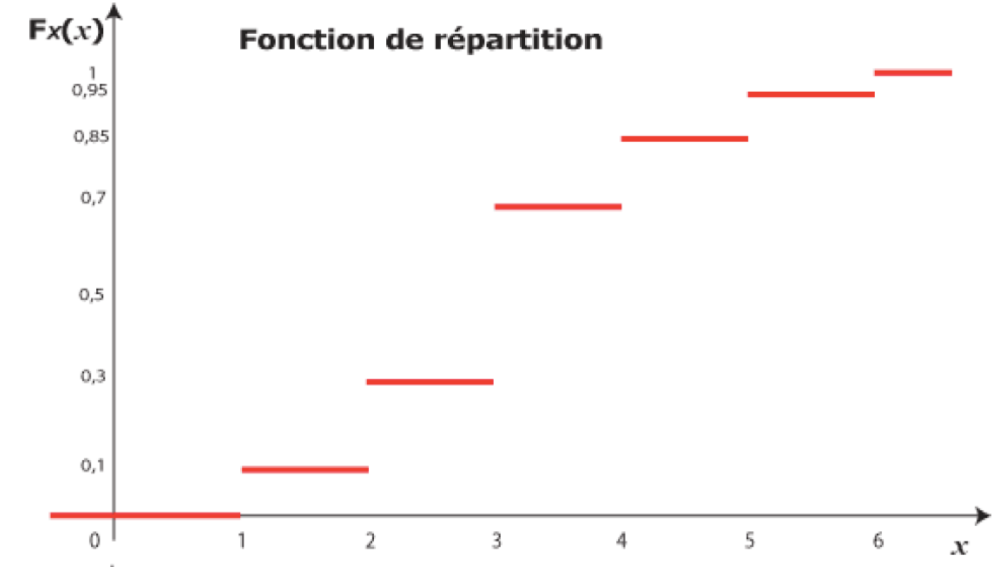
   Var(Y) = 1

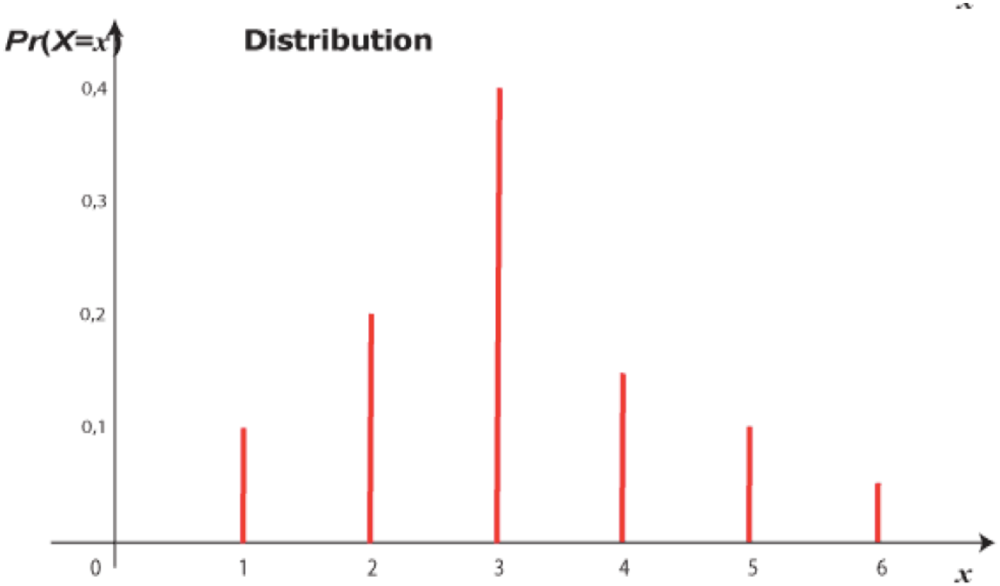
E) Fonction de Répartition

- C'est une <u>fonction cumulative</u> car on somme l'ensemble des probabilités (p_i) des x_i survenus avant x

- F(x) sera toujours une fonction <u>monotone croissan</u>te

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$


Fx(x)
Fonction de répartition
1
0,95
0,85
0,7
0,5
0,3
0,1
0
1
2
3
4
5
6
x


Pr(X=x)
Distribution
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1
2
3
4
5
6
x

QRU SOCRATIVE

A propos des variables aléatoires discrètes :

A- La moyenne est un indicateur de dispersion
B- L'écart-type correspond au carré de la variance
C- Soit Y une variable centrée réduite,
alors E(Y) = 1 et Var(Y) = 0
D- La fonction de répartition est cumulative,
monotone et continue
E- tout est faux

CORRECTION : RÉPONSE E

A propos des variables aléatoires discrètes, donnez LA réponse vraie :

A- La moyenne est un indicateur de <u>position</u>
B- La variance correspond au carré de l'écart-type
C- Soit Y une variable centrée réduite,
alors <u>E(Y) = 0</u> et <u>Var(Y) = 1</u>
D- La fonction de répartition est cumulative,
monotone et ~~continue~~ <u>croissante</u>
E- tout est faux

III- Lois de probabilité discrète

A) Loi de Bernoulli $B_{(P)}$

- Épreuve de Bernoulli: Expérience aléatoire aboutissant soit à un succès, soit à un échec

Paramètres:

p : probabilité d'un succès
q = (1 – p) : probabilité d'un échec
X : v-a « nb de succès » pendant l'épreuve

$$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}=p^kq^{1-k} \qquad \text{pour} \qquad k\in\{0,1\}$$

- $\mu = p$
- $\sigma^2 = p(1-p) = pq$

B) Loi Binomiale $B_{(N;P)}$

- C'est une épreuve répétée de Bernoulli: n essais <u>indépendants</u> conduisant à « succès » ou « échec »

Paramètres:

n : nombre d'essais indépendants

p : probabilité d'un succès

q = (1 – p) : probabilité d'un échec

X : v-a « nb de succès » pendant l'épreuve

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad \text{pour} \qquad 0 \leq k \leq n$$

Rappel: $C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

- $\mu = np$
- $\sigma^2 = np(1-p) = npq$

- On peut définir le Taux de sondage $= \frac{n}{N}$

  (n taille de l'échantillon, N effectif de la population)

- Si $\frac{n}{N} \leq 0{,}10$ on applique la loi Binomiale

- Si $\frac{n}{N} \geq 0{,}10$ on applique la loi Hypergéométrique

C) Loi Hypergéométrique $H_{(N,D,n)}$

Soit une population de **N** individus parmi lesquels **D** ont un caractère donné. On prélève un échantillon **n** de cette population **N**. Les individus de l'échantillon sont tirés simultanément (l'ordre de tirage n'a pas de sens) et sans remise.

Paramètres:

N : effectif de la population
D : nb de personnes présentant le caractère étudié dans la population
D/N : probabilité **p** d'avoir le caractère étudié
X : v-a « nb d'individus présentant le caractère étudié » dans l'échantillon **n**

C) Loi Hypergéométrique $H_{(N,D,n)}$

$$P(X=k)=\frac{C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n} \qquad \text{avec} \qquad min(0;n-D) \leq k \leq max(n;D)$$

- **Moyenne :** $\mu = \frac{nD}{N} = np$
- **Variance :** $\sigma^2 = \frac{nD}{N} \times \frac{N-D}{N} \times \frac{N-n}{N-1} = (\frac{N-n}{N-1})np(1-p) = (\frac{N-n}{N-1})npq$

Cette loi est utilisée pour la conception de plans d'échantillonnage pour le contrôle de réception

D) Loi Géométrique $G_{(p)}$

On répète des épreuves de Bernoulli jusqu'à l'obtention d'un succès.

Paramètres:

p : probabilité d'un succès
q : probabilité d'un échec
X : v-a « nb d'essais nécessaires » à l'obtention du 1er succès

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} = pq^{k-1}$$

- $\mu = 1/p$
- $\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$

E) Loi de Poisson $P_{(\lambda)}$

Utilisée pour déterminer la probabilité qu'un certain nombre d'évènements se réalisent par unité de temps (ou de volume, de surface)

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad \lambda > 0$$

➤ $\mu = \sigma^2 = \lambda$

Cette loi est utilisée pour les domaines de la qualité, la fiabilité, la sécurité

QRU SOCRATIVE

À propos du cours

A- La loi géométrique est une répétition d'épreuves de Bernoulli jusqu'à obtention d'un échec
B- Dans la loi de poisson, $\mu = \sigma = \lambda$
C- Si $\frac{n}{N} \geq 0{,}10$ on applique la loi binomiale
D- La loi binomiale et la loi hypergéométrique ont toutes les deux une moyenne $\mu = np$
E- tout est faux

Correction : réponse D

À propos du cours

A- La loi géométrique est une répétition d'épreuves de Bernoulli jusqu'à obtention d'un <u>succès</u>

B- Dans la loi de poisson, $\mu = \underline{\sigma^2} = \lambda$

C- Si $\frac{n}{N} \leq 0{,}10$ on applique la loi binomiale

D- La loi binomiale et la loi hypergéométrique ont toutes les deux une moyenne $\mu = np$

E- tout est faux

QRU SOCRATIVE

À Nice, il y a un moyenne 8 homicides par mois. Quelle est la probabilité d'observer 3 homicides en l'espace d'une semaine?

A- e^{-2}
B- $3e^{-6}$
C- $1 - e^{-6}$
D- $\frac{4}{3}e^{-2}$
E- 1,5

CORRECTION : RÉPONSE D

À Nice, il y a un moyenne 8 homicides par mois. Quelle est la probabilité d'observer 3 homicides en l'espace d'une semaine?

On constate qu'on doit ici utiliser une <u>loi de Poisson</u> car notre problème implique une unité de temps.

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

On doit résoudre en « par semaines ».
8 homicides par mois => 2 homicides par semaine !
Donc un prend un **λ = 2**

$$P(X=3) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{4}{3} e^{-2}$$

IV- Variable Aléatoire Continue

- Ce qui caractérise une variable aléatoire continue, c'est qu'elle a une probabilité <u>nulle</u> d'être égale à un nombre donné

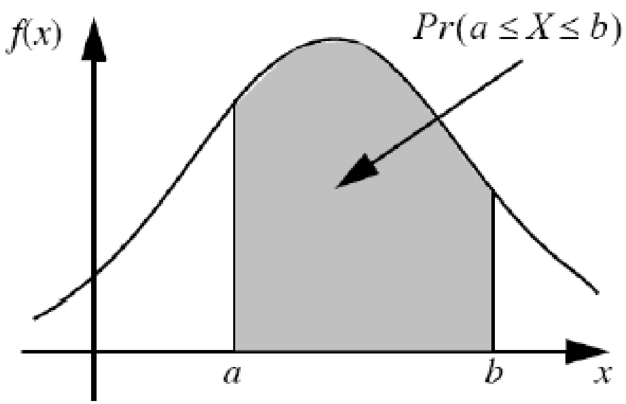
  $P(X=3) = 0$; $P(X=6{,}66) = 0$; $P(X=\sqrt{2}) = 0$

- On utilisera donc des intervalles: $P(a \leq X \leq b) \neq 0$

- **<u>Densité de probabilité:</u>**

C'est une fonction utilisée pour définir la loi de probabilité de X

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$



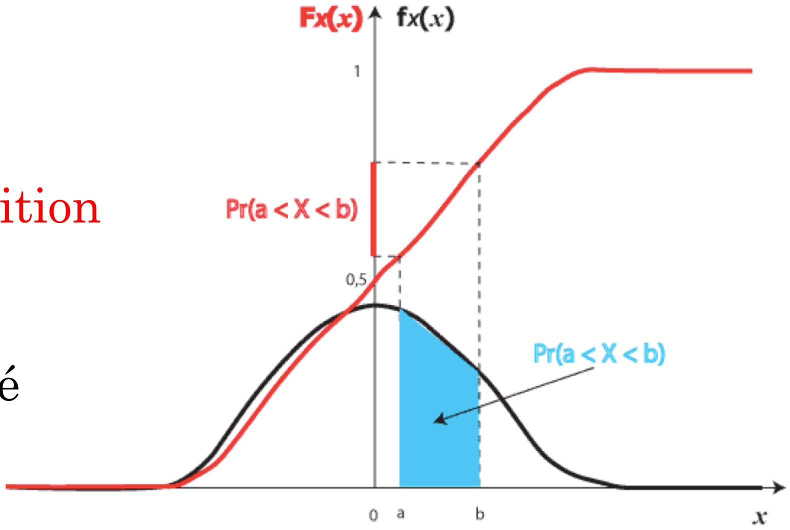
$P(a \leq X \leq b)$ est l'aire sous la courbe

Fonction de Répartition

- Toujours monotone et croissante, et aussi continue
- Partant de 0 pour x → -∞
- Atteignant 1 pour x → +∞

Fonction de répartition

Fonction de densité



V- Lois de probabilité continue

A) Loi Exponentielle $E_{(\lambda)}$

- Fonction de densité: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ avec $\lambda > 0$ et $x \geq 0$

- Paramètres: λ = taux de défaillance instantané

- $\mu = 1 / \lambda$
- $\sigma^2 = 1 / \lambda^2$

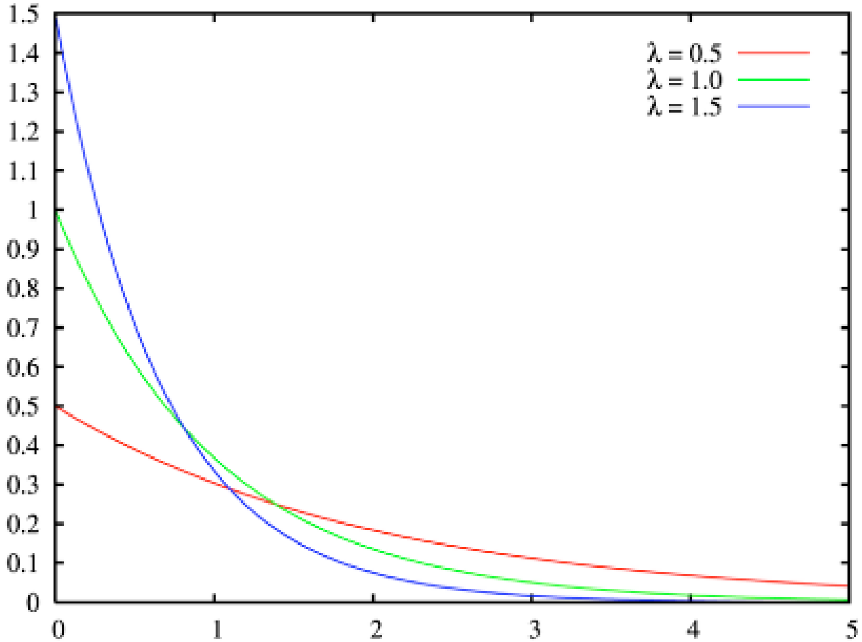
- Fonction de répartition:

$$f(x) = P(X \geq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

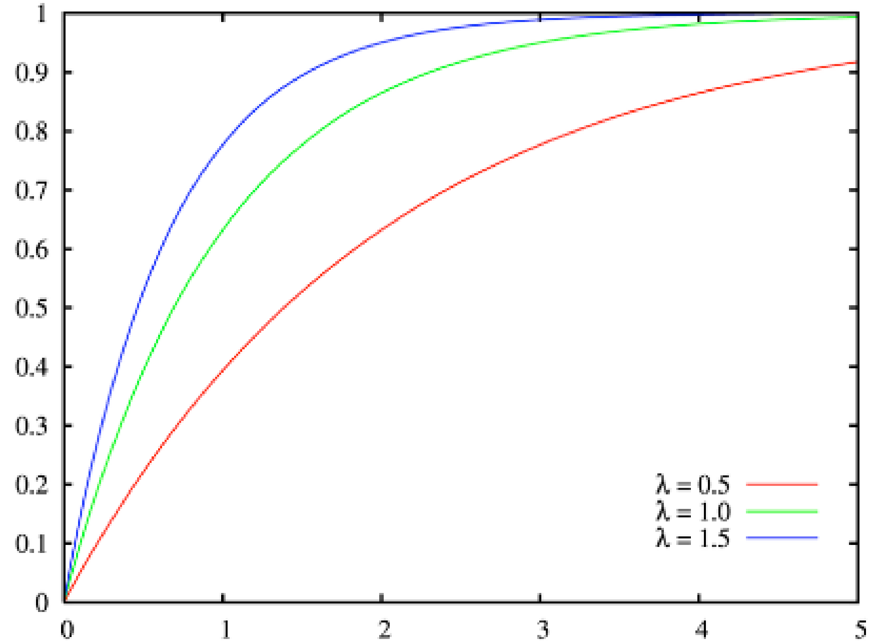
- Si un évènement se réalise selon une loi de Poisson de paramètre λ, le temps entre deux réalisations consécutives de l'évènement considéré est distribué selon une loi exponentielle de paramètre $1/\lambda$

A) Loi Exponentielle $E_{(\lambda)}$

Densité de probabilités (f):



Fonction de répartition (F):



B) Loi Uniforme $U_{(a;b)}$

- Fonction de densité:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a, b]$$
$$f(x) = 0 \quad \text{ si } x \notin [a, b]$$

avec $\lambda > 0$ et $x \geq 0$

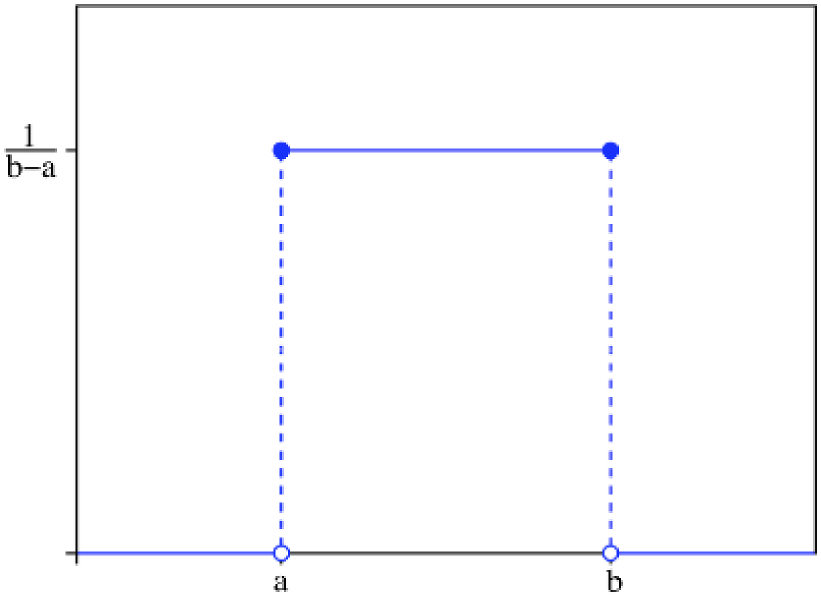
- Paramètres: intervalle $[a,b] \in \mathbb{R}$

- $\mu = (a+b) / 2$
- $\sigma^2 = (b-a)^2 / 12$

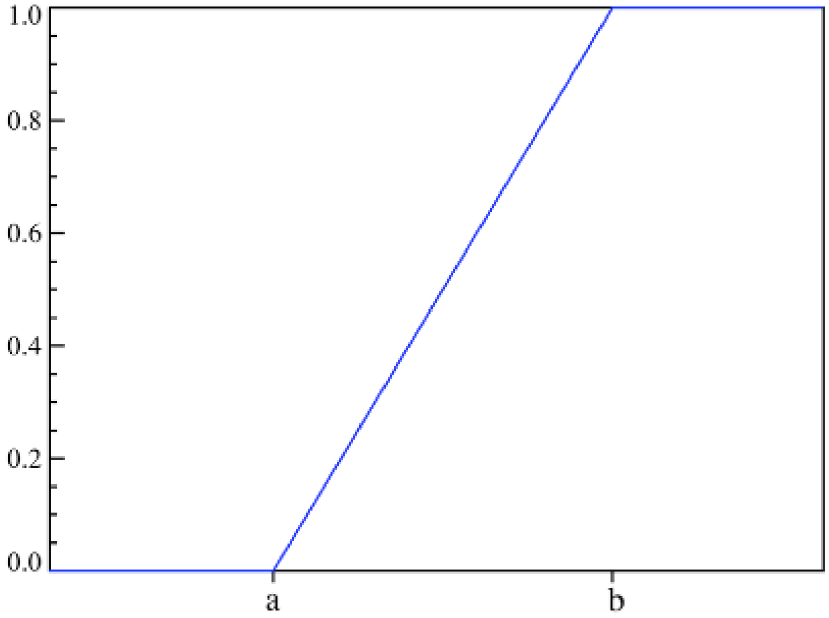
- Toutes les valeurs ont la même probabilité (par exemple un lancer de dé)

B) LOI UNIFORME $U_{(a;b)}$

Densité de probabilités (f):



Fonction de répartition (F):



C) Loi Normale $N_{(\mu;\sigma)}$

- Fonction de densité: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

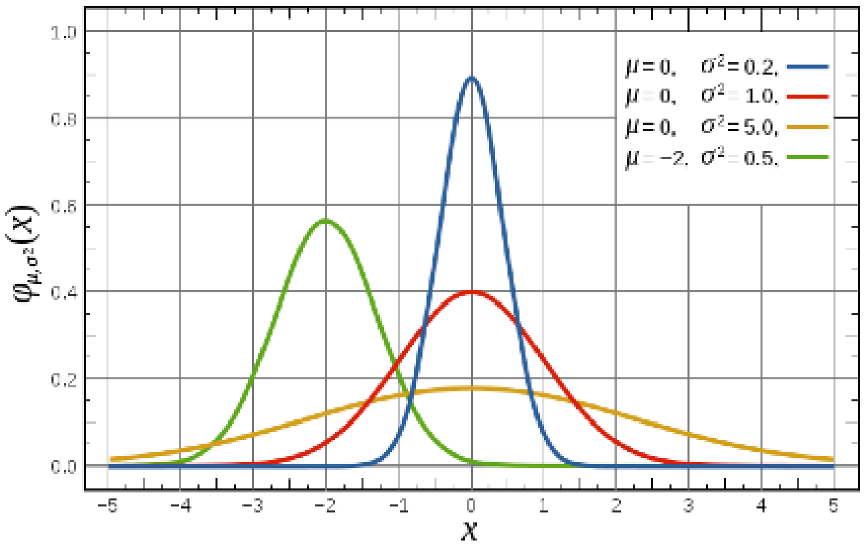
  pour $-\infty \geq x \geq +\infty$

- Paramètres: μ et σ , moyenne et écart-type de X

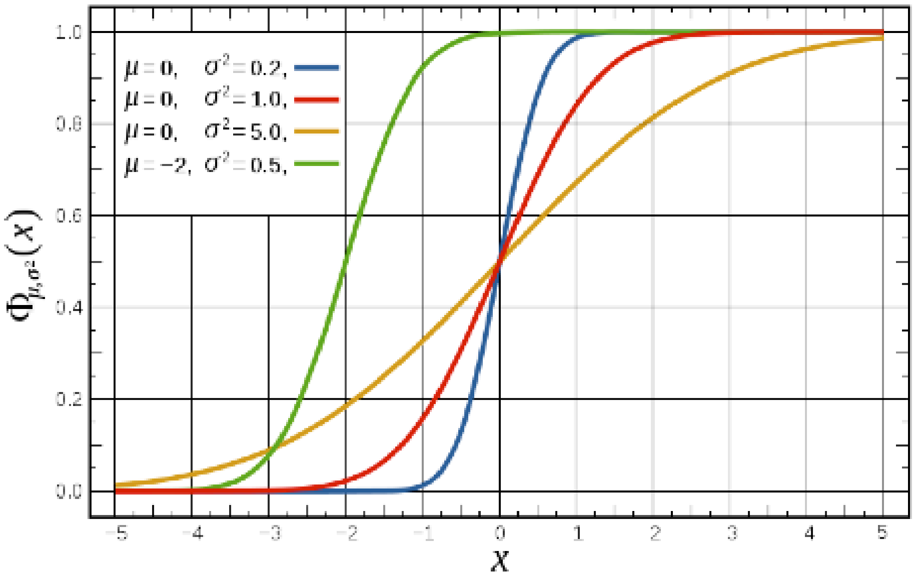
- La densité de probabilité d'une v-a normale est symétrique autour de μ et a deux points d'inflexion aux abscisses μ - σ et μ + σ

C) Loi Normale $N_{(\mu;\sigma)}$

<u>Densité de probabilités (f):</u>



<u>Fonction de répartition (F):</u>



C) Loi Normale $N_{(\mu;\sigma)}$

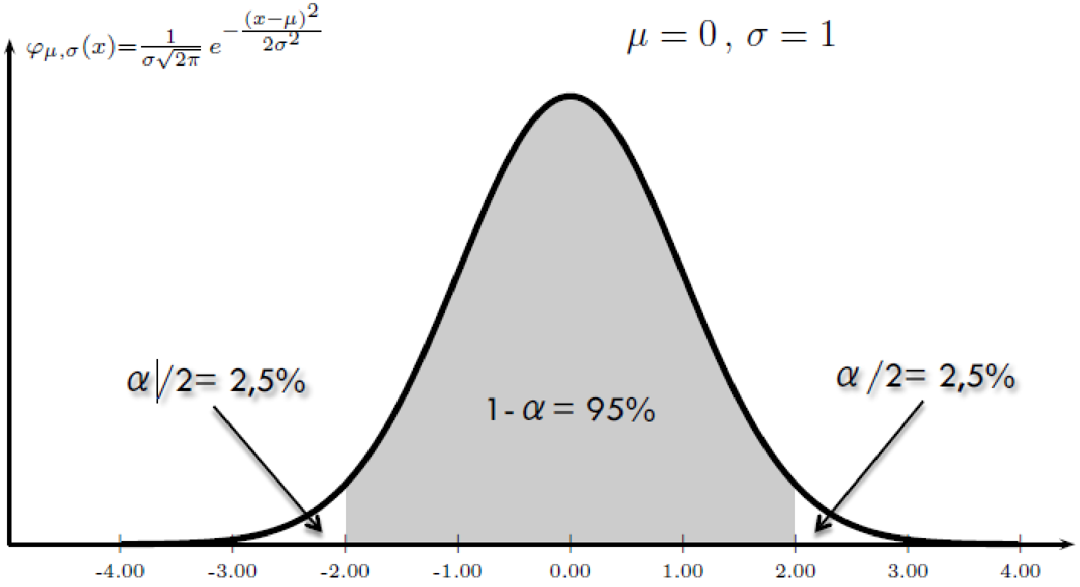
Valeurs limites importantes à savoir

- il y a 10 chances sur 100 pour que $X < \mu - 1,65\sigma$ ou $X > \mu + 1,65\sigma$
- il y a 5 chances sur 100 pour que $X < \mu - 1,96\sigma$ ou $X > \mu + 1,96\sigma$
- il y a 1 chance sur 100 pour que $X < \mu - 2,58\sigma$ ou $X > \mu + 2,58\sigma$
- il y a 1 chance sur 1000 pour que $X < \mu - 3,30\sigma$ ou $X > \mu + 3,30\sigma$

D) Loi Normale centrée réduite

$$N_{(\mu;\sigma)} = N_{(0;1)}$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



- C'est une loi normale de moyenne 0 et de variance 1

E) Approximations

- La loi Binomiale peut être approximée par une loi de Poisson si :
  - $N > 50$
  - $p \leq 0{,}10$
  - $np \leq 5$

alors $B(n;p) \rightarrow P(\lambda = np)$

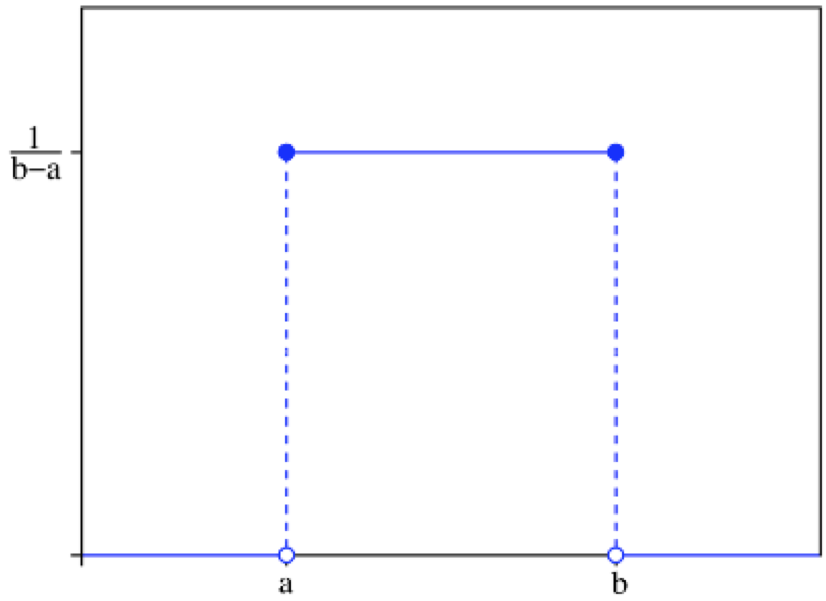
- La loi Binomiale peut être approximée par une loi Normale si :
  - $np \geq 5$
  - $nq \geq 5$

alors $B(n;p) \rightarrow N(np;\sqrt{npq})$

- La loi de Poisson peut être approximée par une loi Normale si :
  - $\lambda > 25$

alors $P(\lambda) \rightarrow N(\lambda;\sqrt{\lambda})$

QRU SOCRATIVE



À propos du cours:

A- Le graphique ci-dessus représente la fonction de répartition de la loi uniforme
B- La variance de la loi uniforme est $\sigma^2 = (b\text{-}a)/12$
C- Pour une variable aléatoire continue, je peux écrire $P(X=\frac{4}{3}) = Y$ avec $Y \neq 0$
D- La loi normale peut être approximée par une loi de poisson si $\lambda > 25$
E- tout est faux

CORRECTION : RÉPONSE B

À propos du cours:

A- Le graphique ci-dessus représente la fonction de <u>densité</u> de la loi uniforme
B- La variance de la loi uniforme est $\sigma^2 = (b-a)^2/12$
C- Pour une variable aléatoire continue, je peux écrire $P(X=\frac{4}{3}) = Y$, ssi $Y = 0$!!
D- La loi de poisson peut être approximée par une loi normale si $\lambda > 25$
E- tout est faux

FIN