Probabilités conditionnelles, théorème de Bayes & indépendance en probabilités

Plan

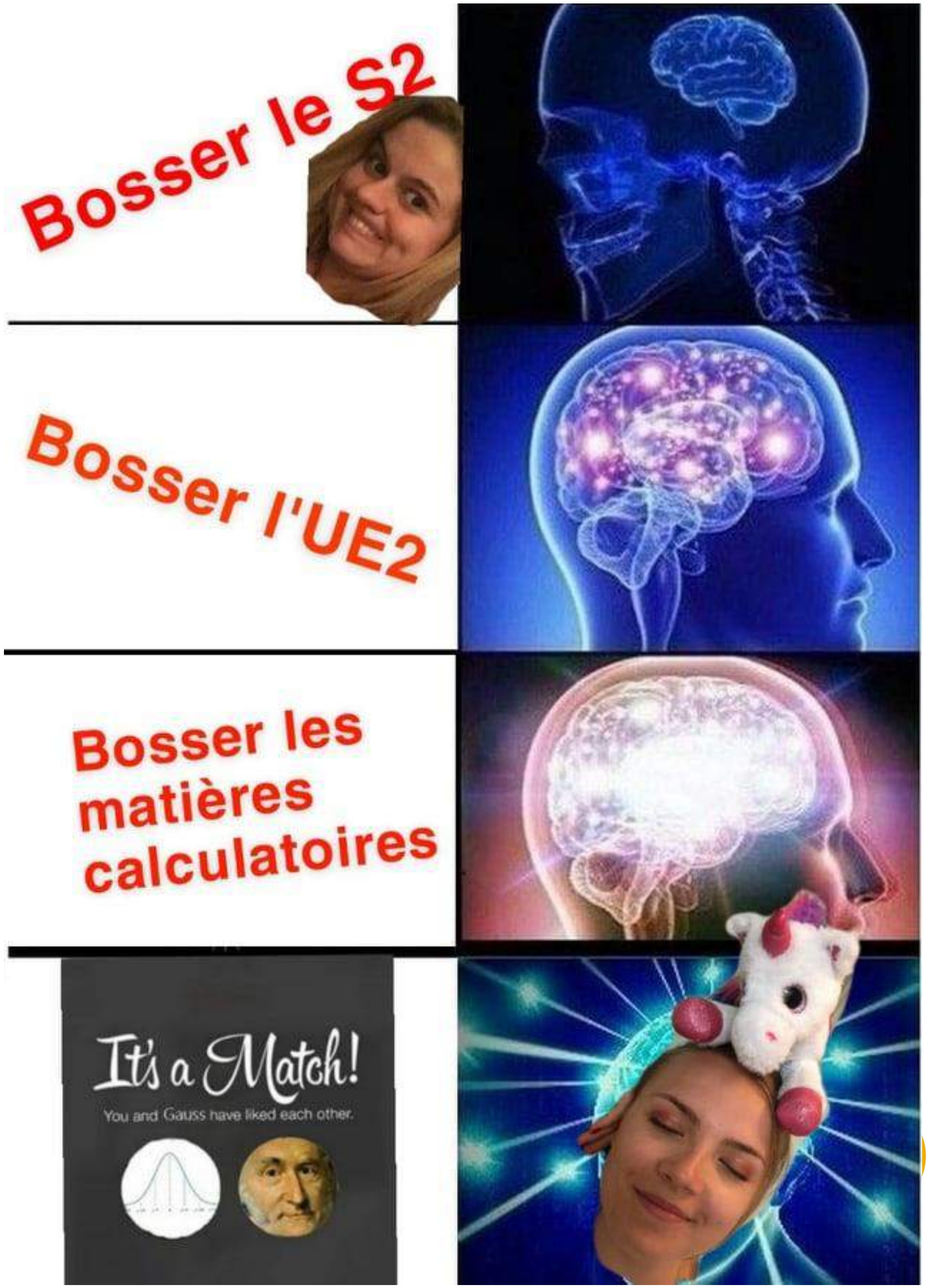
I- Les probabilités conditionnelles

II- Diagramme en arbre

III- Formule & théorème de Bayes

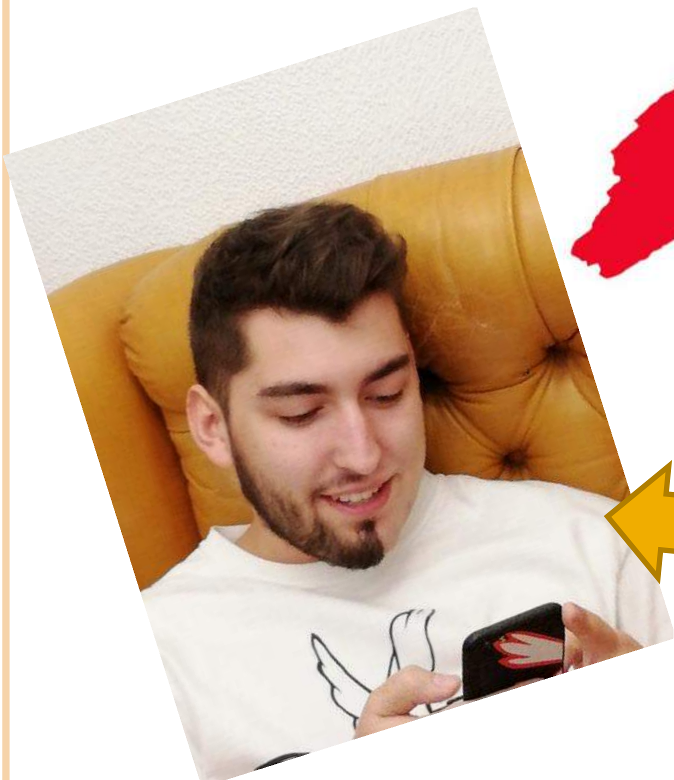
IV- Evénements indépendants

V- Socratives



~~Définitions~~

Voir la fiche!



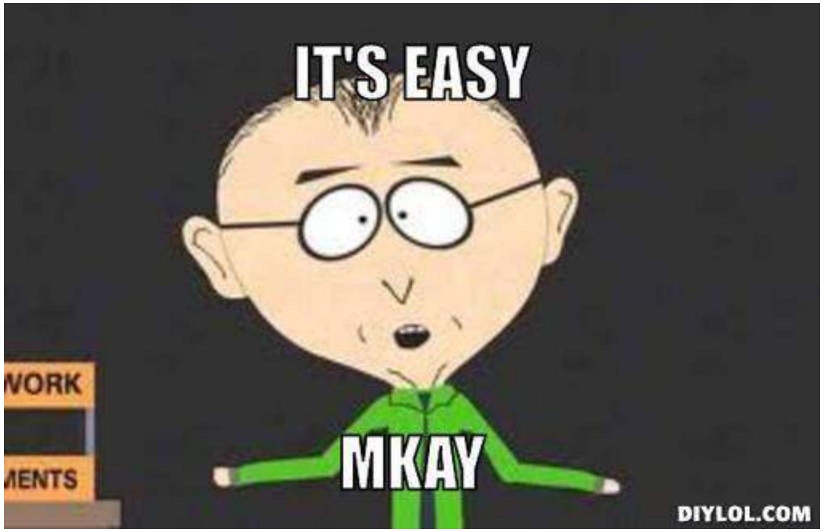
Regardez comment il est tout content de lire notre fiche!

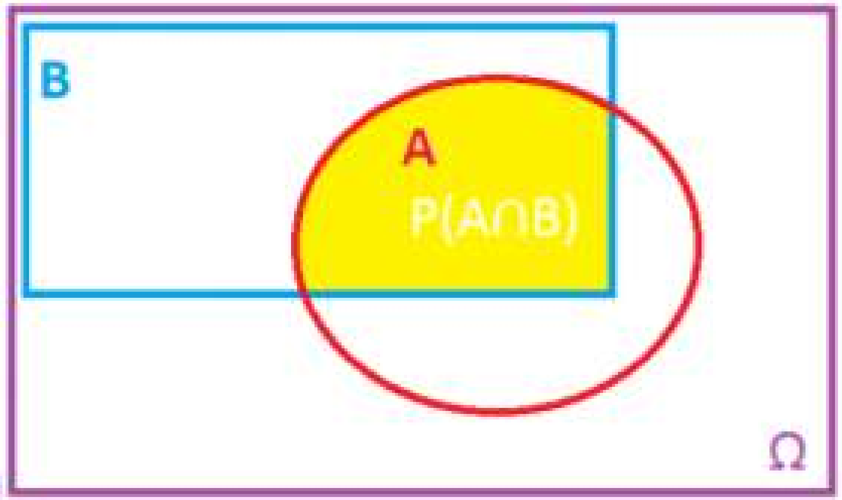
I-Les probabilités conditionnelles

Une probabilité conditionnelle s'intéresse à la probabilité de réalisation d'un événement A **à condition** qu'un autre événement B ait **déjà été réalisé.**

Elle se note $\mathbf{P(A|B)}$ ou $\mathbf{P_B(A)}$, c'est la probabilité de A sachant B.

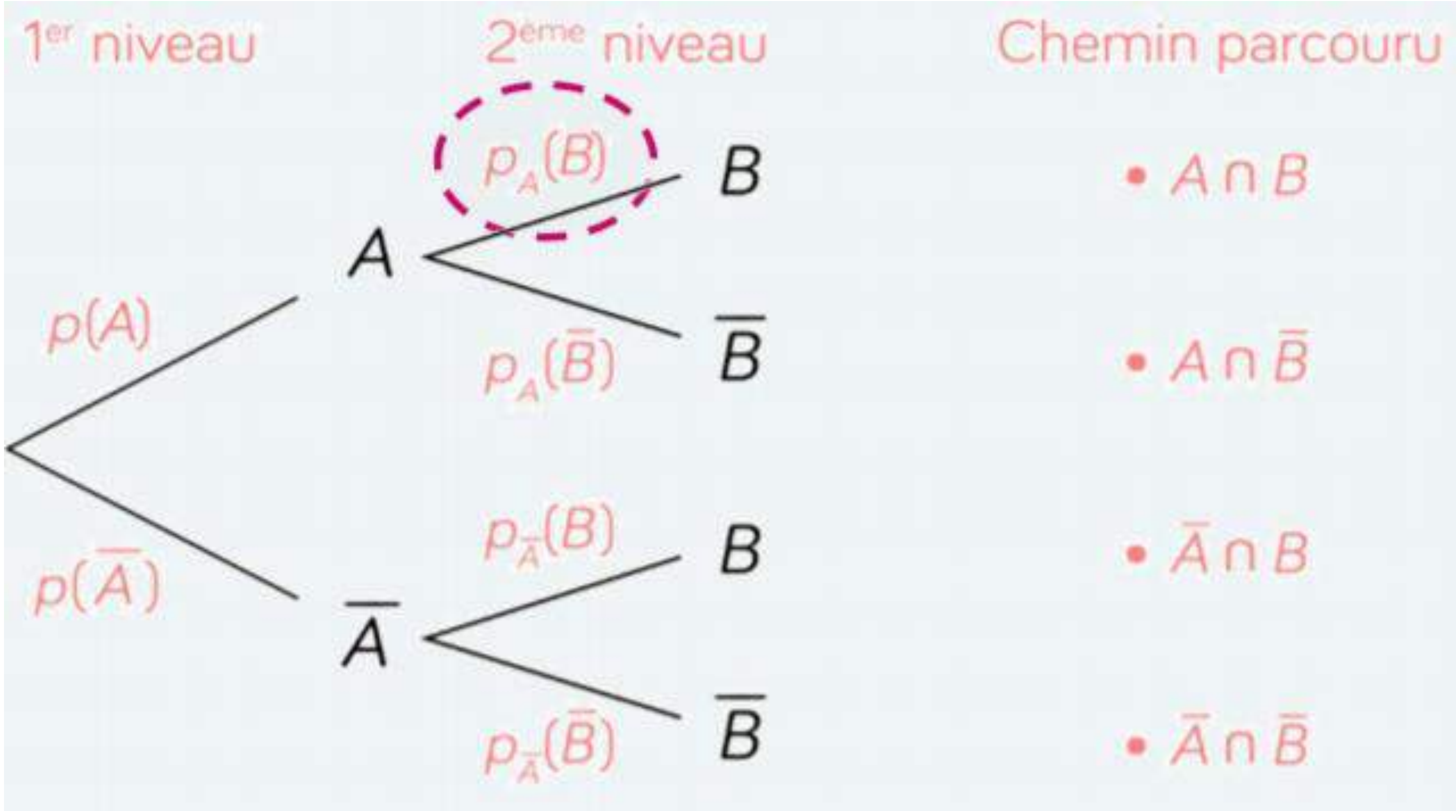
ATTENTION!
$P(A|B) \neq P(A \cap B)$





P(A∩B) est la probabilité que A et B se croisent **dans l'univers Ω**

Dans le cas de P(A|B) on **restreint l'univers à B**



Pour obtenir la probabilité du **chemin** parcouru, on **multiplie** la probabilité de **chaque branche** individuellement parcourue, ce qui nous donne :

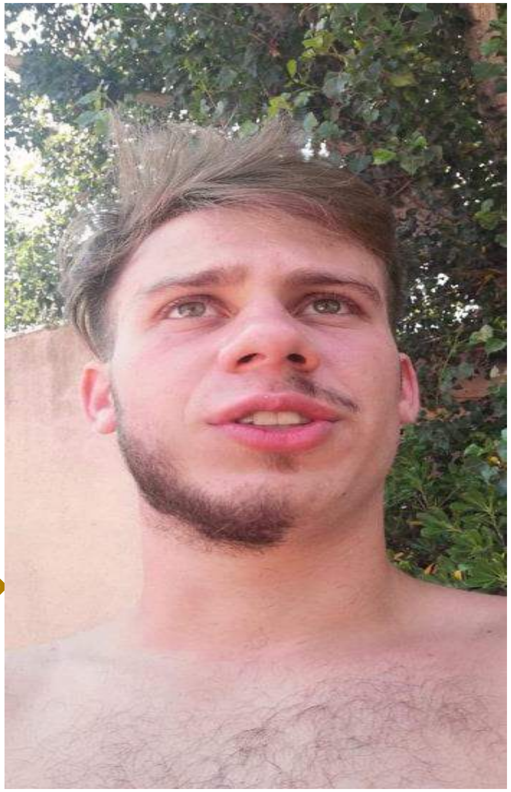
La definition de la probabilité conditionnelle

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

ATTENTION: $P(A\cap B)=P(B\cap A)$

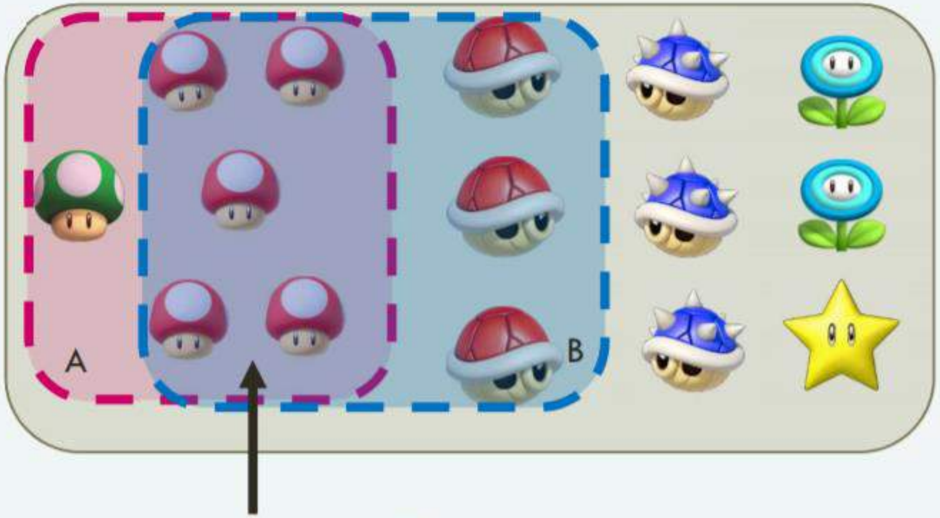
$P(A|B)\neq P(B|A)$

Jeune P1 déjà perdu



Visualiser l'intersection

Evénement A :
« Être un champignon »

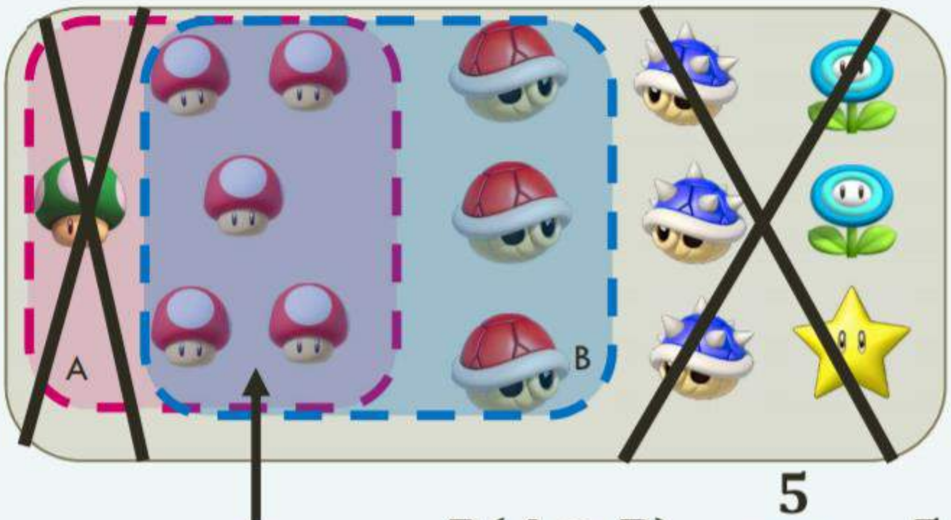


Evénement B :
« Être rouge »

$$P(A \cap B) = \frac{5}{15}$$

Visualiser la probabilité conditionnelle

Evénement A :
« Être un champignon »



Evénement B :
« Être rouge »

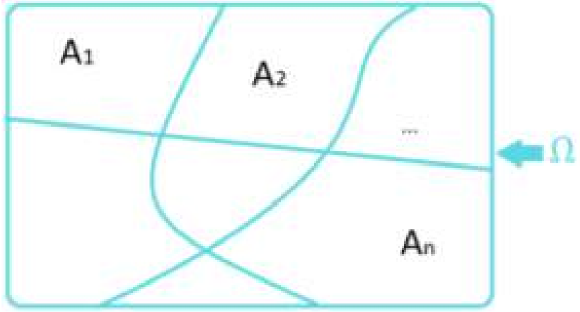
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{5}{8}$$

Théoreme de la multiplication

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

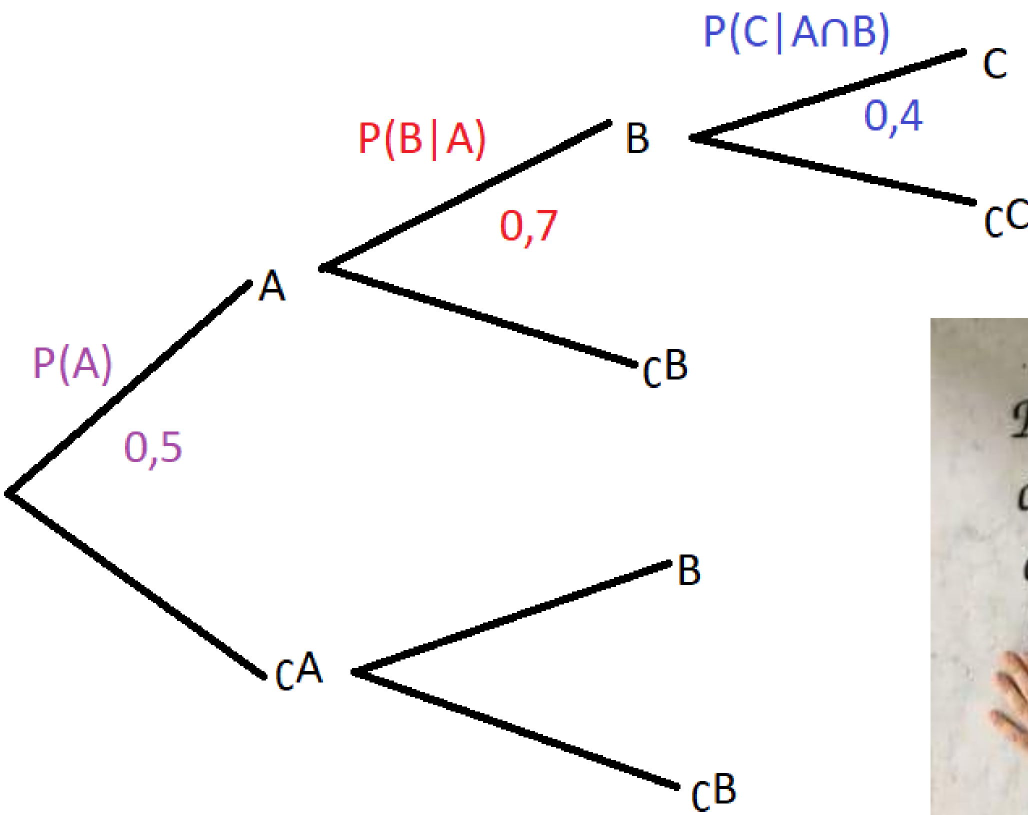
$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A)$$

C'est juste une généralisation pour plusieurs évènements!



$$P(A1 \cap A2 \ldots \cap An) = P(A1) * P(A2|A1) * \ldots * P(An|A1 \cap A2 \ldots \cap An\text{-}1)$$

Illustration des formules précédentes



$$P(A\cap B\cap C)=P(C|A\cap B)*P(A\cap B)$$
$$=P(C|A\cap B)*P(B|A)*P(A)$$
$$=0,4*0,7*0,5$$

QRU guidé pour comprendre!

On a une boite de 10 mouchoirs avec 5 mouchoirs roses, 2 mouchoirs violets et 3 mouchoirs jaunes. On veut connaitre la probabilité de tirer 3 mouchoirs roses d'affilé dans une boite neuve.

A : tirer un premier mouchoir rose / B : tirer un deuxième mouchoir rose / C : tirer un troisième mouchoir rose

$$P(A) = \frac{5}{10} = 0{,}5\ ;\ P(B|A) = \frac{5-1}{10-1} = \frac{4}{9}\ ;\ P(C|A \cap B) = \frac{4-1}{9-1} = \frac{3}{8}$$

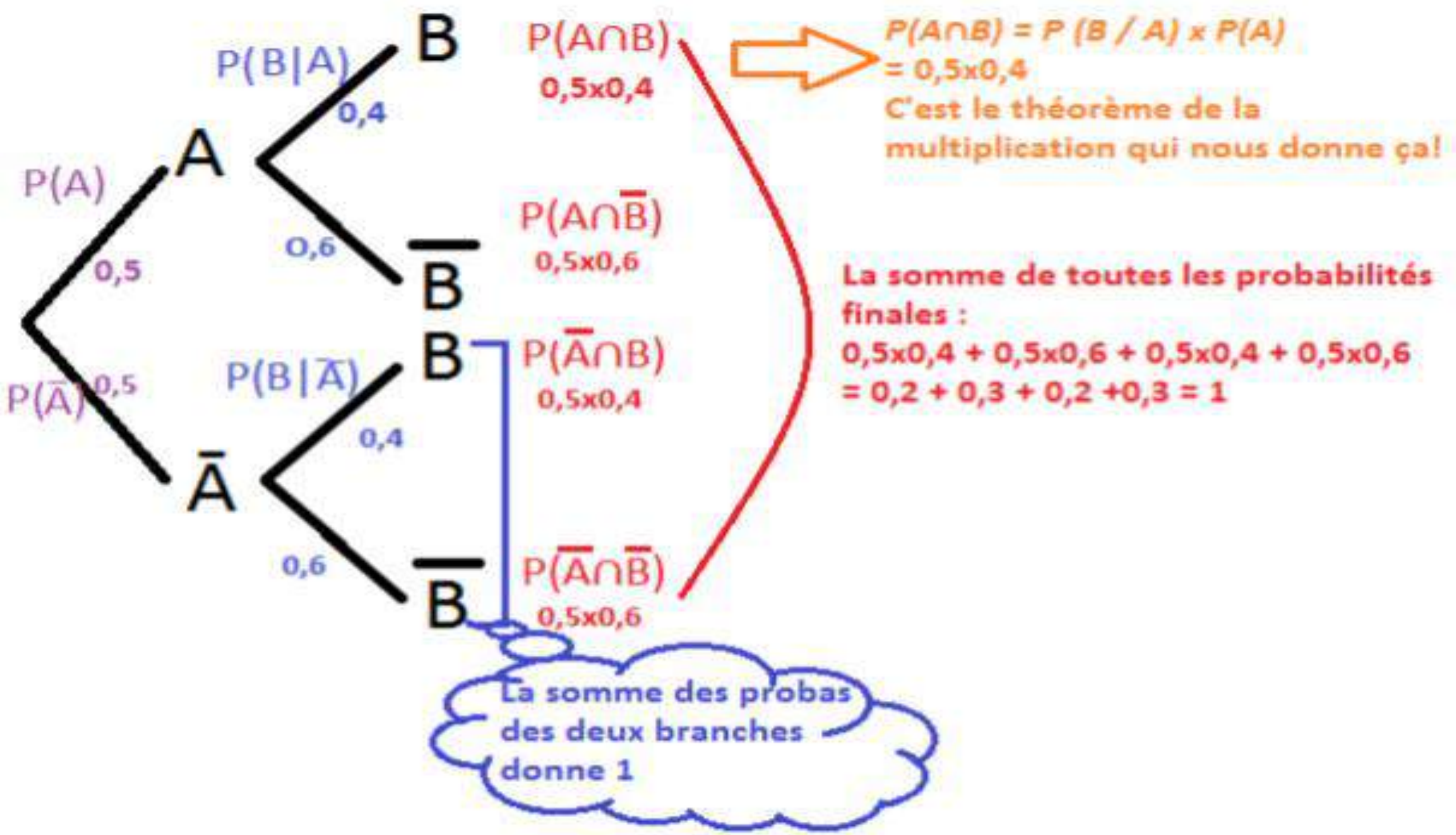
$$\boldsymbol{P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B\,|\,A) \times P(C\,|\,A \cap B) = \frac{5}{10} * \frac{4}{9} * \frac{3}{8}}$$

On a donc 1 chance sur 12 de tirer 3 mouchoirs roses d'affilé!

II-Diagramme en arbre

Soit une suite finie d'événements avec un nombre fini de résultats possibles.
Une expérience **dépend du résultat de l'expérience passée**: ce sont des probabilités **conditionnelles**.

1. Selon le **théorème de la multiplication** la probabilité d'un chemin est le **produit** de chaque branche du chemin !
2. Les chemins **s'excluent** mutuellement
3. **La somme** de toutes les probabilités des finalités **doit être 1**.



Exemple : Si l'évènement A considéré est « avoir plus de 20 ans » et l'évènement B « être blond ». - Le chemin 1 : P(A∩B) est « avoir plus de 20 ans ET être blond », - Le chemin 2 est : P(A∩꜀B) est « avoir plus de 20 ans ET ne pas être blond », On comprend bien qu'un chemin est exclusif, les deux chemins ne sont pas compatibles !

III-Formule et théorème de Bayes

A) Formule de Bayes

Définition d'une proba conditionnelle :

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \text{ ou } P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

+

Théorème de la multiplication :

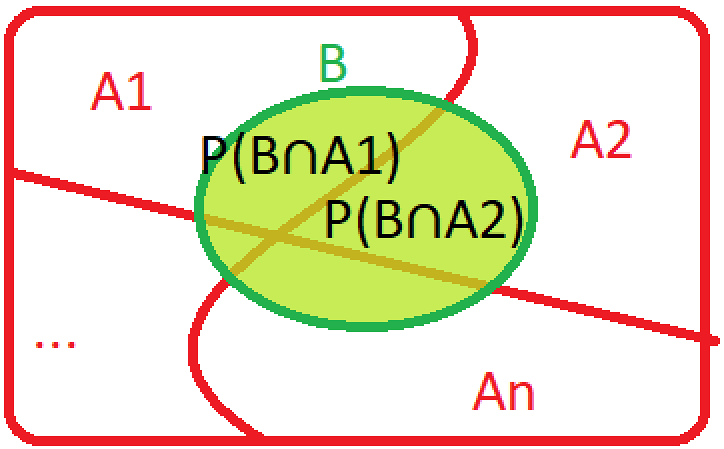
$$P(B\cap A) = P(A\cap B) = P(A \mid B) \times P(B) = P(B \mid A) \times P(A)$$

=

Formule de Bayes :

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) \times P(B)}{P(A)}$$

B) Théoreme des probabilités totales



A1 , A2,…, An forment une **partition** de l’univers.

Théorème des probabilités totales :

$$\mathbf{P(B) = P(B\cap A1)+P(B\cap A2)+\ldots+P(B\cap An\ )}$$

C) Théorème de Bayes

Théorème des probabilités totales :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$$

+

Théorème de la multiplication :

$$P(B \cap A_n) = P(B \mid A_n) \times P(A_n)$$

=

$$P(B) = P(B \mid A_1) \times P(A_1) + P(B \mid A_2) \times P(A_2) + \ldots + P(B \mid A_n) \times P(A_n)$$

+

Formule de Bayes :

$$P(A_n \mid B) = \frac{P(B \mid An) \times P(An)}{P(B)}$$

=

Théorème de Bayes :

$$P(An \mid B) = \frac{P(B \mid An) \times P(An)}{P(B \mid A1) \times P(A1) + P(B \mid A2) \times P(A2) + \ldots + P(B \mid An) \times P(An)}$$

IV-Evénements indépendants

Deux événements sont **indépendants** si :

$$P(B \cap A) = P(A) \times P(B).$$

Les événements sont indépendants dans la mesure où la probabilité de réalisation de A **ne change pas** avec la réalisation de B.

Ainsi : $\mathbf{P(A|B)=P(A)}$ et

$\mathbf{P(B|A)=P(B)}$

Conséquences de l'indépendance de A et B :

$\overline{A}$ et B sont indépendants.
A *et* $\overline{B}$ sont indépendants.
$\overline{A}$ *et* $\overline{B}$ sont indépendants.

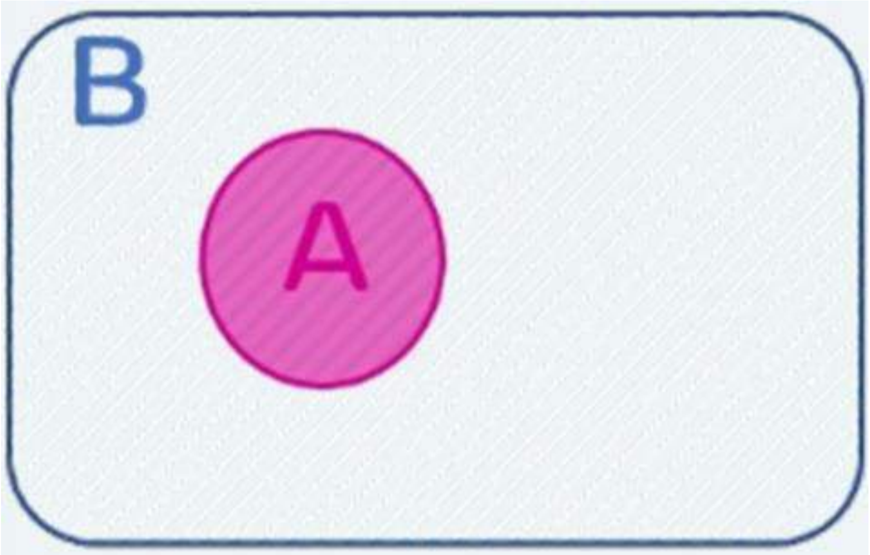
Cas de trois événements :

Soient A, B et C.
Si ils sont **indépendants deux à deux** (A indépendant de B, A indépendant de C et C indépendant de B).
Et si **P(A∩B∩C)=P(A)xP(B)xP(C)**
Alors ces trois événements sont indépendants !
Remarque : La seconde condition n'est pas une conséquence de la première.

Indépendance et inclusion

Définition : A⊂B : A est inclus dans B ⇢ $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)}$

Ex: l'événement « avoir un 6 aux dés » est inclus dans l'événement « avoir un nombre pair aux dés ».



Conséquences

Formule de Bayes quand $A \subset B$:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

Formule de Bayes quand $B \subset A$:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(B \mid A) = \frac{P(B)}{P(A)}$$

⚠ A et B ne sont PAS indépendants ⚠

Indépendance et exclusion

Définition:

$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \emptyset$; $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \mathbf{0}$:

A et B sont **exclusifs/disjoints/incompatibles**

→ **P(A|B)=P(B|A)=0**

Exemple : A : « être majeur » B : « être mineur », les deux ne peuvent pas se produire en même temps ils sont incompatibles.

A et B ne sont pas indépendants

Incompatibles=exclusifs=disjoints	Indépendants
Ne fait PAS intervenir leur probabilité	Liés à leur probabilité
Ne peuvent PAS se produire en même temps	Peuvent se produire en même temps (*la réalisation d'un n'influençant pas l'autre*)
Défini par : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ Donne : $P(A \cap B) = 0$	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Salle : PERFECTUE4

socrative

by MasteryConnect

QCM 1

-Allez sur Socrative avec vos téléphones
-LOGIN-Student-Room name: PERFECTUE4

Pour cette rentrée en PACES, on remarque dans l'amphi que 20% des PACES sont allés chez le coiffeur, 80% ont racheté des surligneurs et 10% sont allés chez le coiffeur et ont acheté de nouveaux surligneurs. Quelle est la probabilité qu'un P1 ait acheté des surligneurs sachant qu'il est allé chez le coiffeur ?

A) ½
B) 0,25
C) 1/10
D) 0,5
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

QCM 1

-Allez sur Socrative avec vos téléphones
-LOGIN-Student-Room name: PERFECTUE4

On post les événements: A=[l'étudiant est allé chez le coiffeur] avec P(A)=0,2 et B=[l'étudiant a acheté des surligneurs] avec P(B)=0,8. De plus, P(A∩B)=0,1.

A) Vrai, P(B|A)= $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,2} = 0,5$
B) Faux
C) Faux
D) Vrai ☺

Courage Tristampax, on a presque fini!

QCM 2

-Allez sur Socrative avec vos téléphones
-LOGIN-Student-Room name: PERFECTUE4

La promo PACES 2019-2020 compte 44% de hommes et 56% de femmes. Pendant la Tut'Rentrée, 5% des hommes et 1% des femmes ont la grippe. Donnez **la/les** proposition(s) exacte(s) parmis les suivantes:

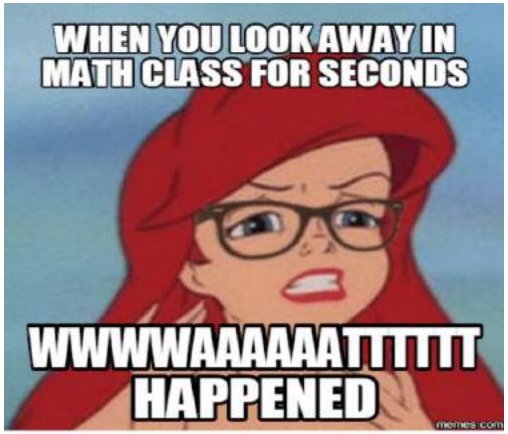
A) La proportion de personnes grippées est d'environ 6%
B) La proportion de personnes grippées est d'environ 2,8%
C) La proportion de personnes indemnes de la grippe est d'environ 94%
D) On choisit une personne au hasard. Elle est grippée. La probabilité qu'elle soit un homme est d'environ 80%.
E) On choisit une personne au hasard. Elle est grippée. La probabilité qu'elle soit un homme est d'environ 37%

QCM 2

-Allez sur Socrative avec vos téléphones
-LOGIN-Student-Room name: PERFECTUE4

On pose : H=[être un homme] avec P(H)=0,44. F=[être une femme] avec P(F)=0,56 et G=[être grippé]. Ainsi P(H∩G)=5%*44%=0,022 et P(F∩G)=1%*56%=0,0056. Donc P(G)=0,022+0,0056=0,0276

A) Faux
B) Vrai, P(G)=P(G∩F)+P(G∩H)=0,0276=2,76%
C) Faux, c'est 1-0,0276=0,9724=97,24%
D) Vrai, P(H | G) = $\frac{P(H \cap G)}{P(G)} = \frac{0,05*0,48}{0,0276} = \frac{0,022}{0,0276} = 0,8$
E) Faux



ATTENTION : QCM difficile basé sur les diapos du prof!

QCM 3

-Allez sur Socrative avec vos téléphones
-LOGIN-Student-Room name: PERFECTUE4

Donnez la/les réponse(s) exacte(s) parmi les propositions suivantes:

A) Pour 3 événements A, B et C, si ils sont indépendants deux à deux, alors $P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B) * P(C)$
B) Si A et B indépendants, $\bar{A}$ et B indépendants
C) Quand on a $P(A \cap B) = 0$, les événements A et B sont disjoints/indépendants.
D) Quand $B \subset A$, on a $P(A | B) = \frac{P(A)}{P(B)}$
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

QCM 3

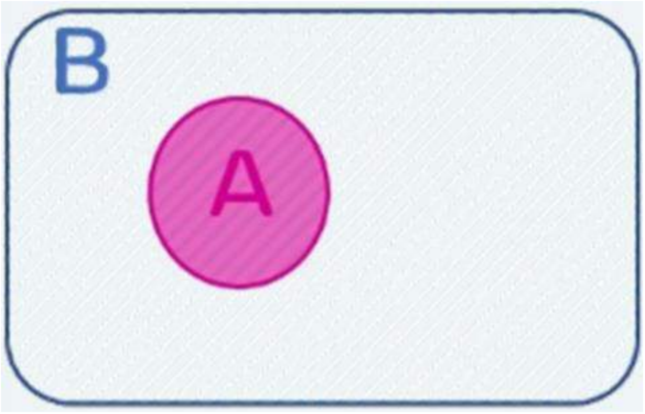
-Allez sur Socrative avec vos téléphones
-LOGIN-Student-Room name: PERFECTUE4

A) Faux, l'égalité est la deuxième **condition**, mais ce n'est pas une conséquence de la première!

B) Vrai, texto le cours <3

C) Faux, disjoints/**exclusifs**! Indépendant ne fait pas partie des synonymes!

D) Faux, quand **A⊂B**, on a P(A | B) = $\frac{P(A)}{P(B)}$, quand **B⊂A** on a P(A | B) = 1



QCM 4

-Allez sur Socrative avec vos téléphones
-LOGIN-Student-Room name: PERFECTUE4

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a, parmi les malades, un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.

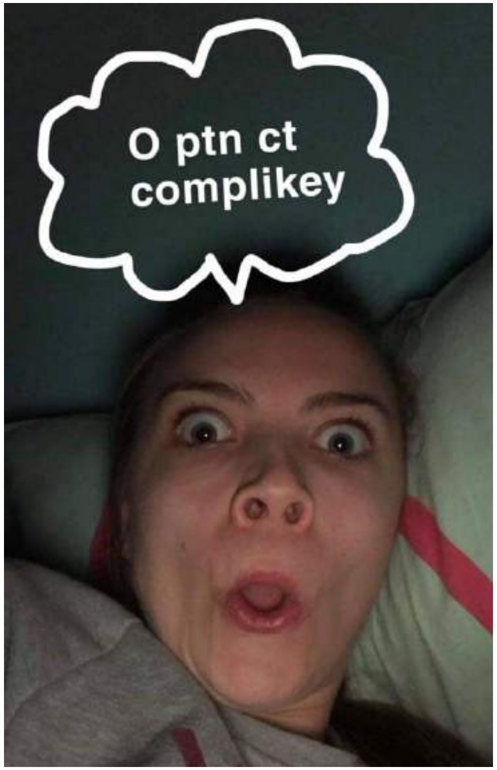
A) La probabilité de tomber malade est de $\frac{1}{20}$
B) La probabilité de tomber malade est de $\frac{1}{5}$
C) La probabilité de tomber malade est d'environ $\frac{1}{10}$
D) On tire une personne au hasard, sachant qu'il est malade, la probabilité qu'il soit vacciné est de 0,2
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

QCM 4

-Allez sur Socrative avec vos téléphones
-LOGIN-Student-Room name: PERFECTUE4

On pose les données de l'énoncé: V=[être vacciné], M=[être malade]
P(V)=$\frac{1}{4}$; **P(M | V)=$\frac{1}{12}$** ; $P(CV|M) = 4 * P(V|M)$; $P(CV|M)+ P(V|M)=1$,
donc **P(V | M)=0,2** (ce sont 2 branches de l'arbre de probabilités, leur somme vaut 1).
D'après la formule de la proba conditionnelle,
P(V∩M)=P(M | V)*P(V)=$\frac{1}{12} * \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{48}}$

A) Faux
B) Faux
C) Vrai, P(M)=$\frac{P(V\cap M)}{P(V|M)} = \frac{1/48}{1/5} = \frac{5}{48}$
D) Vrai, P(V | M)=0,2



QCM des diapos du prof mais largement simplifié!

QCM 5

-Allez sur Socrative avec vos téléphones
-LOGIN-Student-Room name: PERFECTUE4

On cherche à faire une étude sur les maladies des patients dans le service des maladies infectieuses de l'hôpital Archet 1. Sur 100 patients, 40 n'ont pas le VIH. Parmi les patients qui ont le VIH, 20% ont l'hépatite B. On sait aussi que 25 patients ont l'hépatite B sur les 100. Enfin parmi les patients qui ont le VIH et l'hépatite B, 50% ont l'herpes. Quelle est la probabilité de tomber sur un patient qui a les 3 maladies?

A) 0,02
B) 0,04
C) 0,06
D) 0,08
E) Les réponses A, B, C et D sont fausses

On se réveille, c'est le dernier QCM!

QCM 5

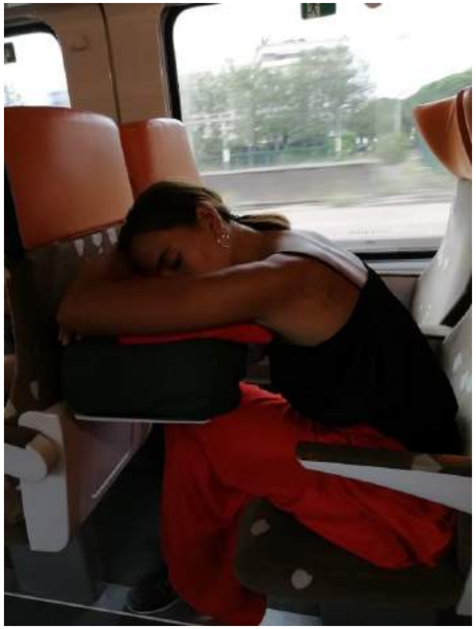
C’est trop tard pour se connecter sur Socrative mon petit

V=[avoir le VIH], B=[avoir l’hépatite B], H=[avoir l’herpes]

$P(V) = 1-0{,}4 = 0{,}6$; $P(B|V) = 0{,}2$; $P(H|B \cap V) = 0{,}5$

A) Faux
B) Faux
C) Vrai, $P(V \cap B \cap H)=P(V)*P(B|V)*P(H|B \cap V)=0{,}6*0{,}2*0{,}5=0{,}06$
D) Faux
E) Faux

Vous après 2h de cours



Merci pour votre attention!