Ondes et RMN

Onde = Phénomène vibratoire qui oscille au cours du temps et qui se propage.

Il y a 2 familles d'ondes :
- Mécaniques : associées à des mouvements locaux de matière : elles ont donc besoin d'un milieu matériel pour se propager (*ex : son*)
- Électromagnétiques : NON associées à des mouvements de matière : elles peuvent se déplacer dans le vide comme dans les matériaux (*ex : lumière, radio*)

Une onde transporte de l'énergie, mais pas de matière !

Deux principaux paramètres influent sur l'onde :
- ✓ Source : la structure temporelle de la perturbation suit celle de la source.
- ✓ Milieu : il détermine la vitesse de propagation selon ses propriétés physiques.

On étudie deux types de propagation des ondes :

Mode Longitudinal	Mode Transversal
Ondes de Compression : leur vibration est parallèle au sens de propagation (*ex : ressort comprimé*)	Ondes de cisaillement : leur vibration est perpendiculaire au sens de propagation (*ex : corde tendue ou OEM*)

I. Vitesse de propagation

Ces formules sont très importantes ! Vous pourrez les retrouver facilement en utilisant les unités ou en apprenant une et en retenant que T et KL représentent la même chose.

$$v = \sqrt{\frac{KL}{\mu}}$$

K = Raideur du ressort en $N.m^{-1}$
L = Allongement en m
μ = masse linéique en $kg.m^{-1}$

Cas d'un ressort tendu

Onde	Milieu	Vitesse
Transversale	Corde	$(T/\mu)^{1/2}$ tension T
Longitudinale	Ressort tendu	$(KL/\mu)^{1/2}$
Pression (onde sonore)	Gaz	$c_s \propto (P_0/\varrho_0)^{1/2}$ P_0 ($\propto T_0$) pression ϱ_0 masse volumique $c_s \approx 346$ $m.s^{-1}$ (à T_0=298 K)
EM	Vide	$c=(\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ $\approx 3\times10^8$ $m.s^{-1}$ ε_0 permittivité du vide μ_0 perméabilité
Onde électrique	Ligne à transmission (câble coaxial)	$(\Lambda\Gamma)^{-1/2}$ $\approx 2\times10^8$ $m.s^{-1}$ Γ capacité linéique Λ inductance linéique

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

T = Tension de la corde en N
L = Longueur de la corde en m
μ = masse linéique en $kg.m^{-1}$

Cas d'une corde tendue

Attention, le tableau ci-contre n'est pas à connaître par cœur, retenez bien la vitesse de la lumière et les formules du dessus très importantes en calcul.
De plus n'oubliez pas de vérifier les unités !

II. Ondes progressives à 1 dimension

On considère ici une onde se déplaçant dans une seule direction, sans amortissement. Mathématiquement on la symbolise par : **l'équation d'Alembert.**

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Cette équation admet une solution sous la forme de deux fonctions reposant sur le principe de superposition :

$$\psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

Tout ça sert en fait à montrer que lorsque deux ondes de sens opposé se croisent, leurs amplitudes s'additionnent ce sont les interférences :

- ✓ Constructives : si les ondes ont des amplitudes de mêmes signes au croisement, on a une onde d'amplitude augmentée.
- ✓ Destructives : si les ondes ont des amplitudes de signes opposés au croisement, on a une onde d'amplitude diminuée.

Attention ! L'équation d'Alembert peut d'écrire de plusieurs façons notamment la suivante :
$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \kappa \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ et nous permet de retrouver la vitesse : $v = \sqrt{\frac{1}{\kappa}}$

Cette partie est assez difficile au premier abord.
Une 2ème fiche avec de plus amples explications est dispo pour bien comprendre la 1ère fois.

III. Notion d'impédance

L'impédance mécanique représente la résistance d'un milieu au passage d'une onde. Elle se note Z et s'exprime en $kg.s^{-1}$.

$$Z = \frac{T}{v} = \sqrt{T\mu} = \mu v$$

Calcul de l'impédance

Dans un circuit électrique, l'impédance est en Ohm.

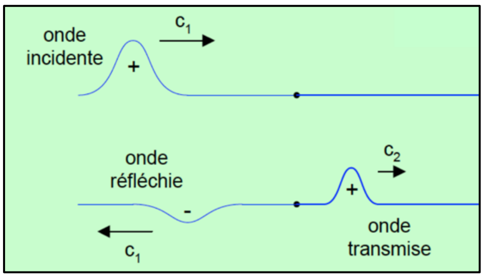
Onde	Milieu	Impédance
Pression (onde sonore)	Gaz	$Z=\varrho_0 c_s \propto (P_0\varrho_0)^{1/2}$ $\approx 414\ kg.m^2.s^{-1}$
EM	Vide	$Z_0=(\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}=\mu_0 c$ $\approx 376{,}73\ \Omega$
Onde électrique	Ligne à transmission (câble coaxial)	$Z_c=(\Lambda/\Gamma)^{1/2}$ $\approx 50\ \Omega$

NB : Le tableau ci contre n'est pas à connaître.

IV. Réflexion et transmission

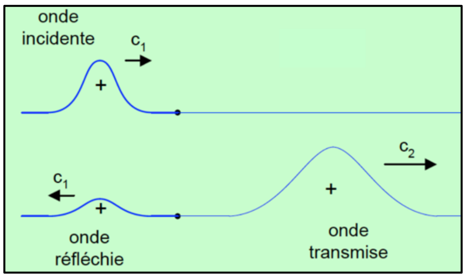
C'est la notion d'impédance qui nous permet d'étudier ces phénomènes. En effet on va considérer une onde, passant dans deux milieux d'impédances différentes :

Cas 1 : $Z_2>Z_1$ ⇔ $\mu_2>\mu_1$ ⇔ $c_2<c_1$



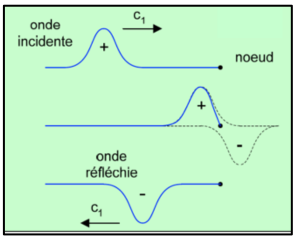
➔ On a une **réflexion partielle avec changement de signe.**

Cas 2 : $Z_1>Z_2$ ⇔ $\mu_1>\mu_2$ ⇔ $c_1<c_2$



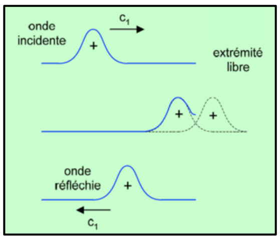
➔ On a **une réflexion partielle sans changement de signe.**

Cas 3 : Extrémité fixe ⇔ Z_2 -> ∞



➔ On a une **réflexion totale avec changement de signe.**

Cas 4 : Extrémité libre ⇔ Z_2 = 0



➔ On a une **réflexion totale sans changement de signe.**

Mathématique, on exprime cela avec les **coefficients de réflexion et de transmission** calculées grâce aux amplitudes des différentes ondes.

$$r = \frac{A_r}{A_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Coef. Réflexion

$$t = \frac{A_t}{A_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Coef. Transmission

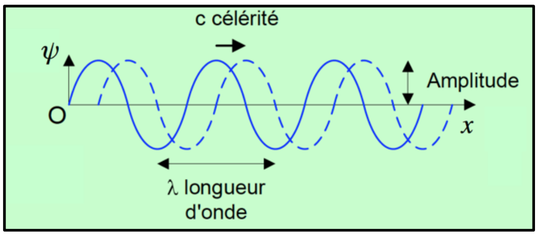
À noter que :

- ✓ A_i = Amplitude de l'onde incidente
- ✓ A_r = Amplitude de l'onde réfléchie
- ✓ A_t = Amplitude de l'onde transmise

Attention ! -1<r<1
Un signe négatif indique une réflexion avec changement de signe.

V. Cas particuliers

Ondes progressives sinusoïdales



On relève plusieurs données : la longueur d'onde λ, la période T mais aussi la pulsation ω et le nombre d'onde k donnés par :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Une onde transporte de l'énergie, elle possède une puissance P qui s'exprime en W (=J.s⁻¹) :

$$P = \frac{1}{2} Z A^2 \omega^2$$

Dans le cas d'un changement d'impédance, les puissances aussi changent !

$$\frac{P_r}{P_i} = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2$$

$$\frac{P_t}{P_i} = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

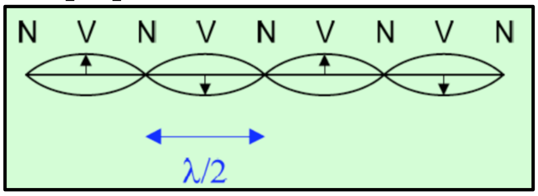
P_r = Puissance réfléchie
P_t = Puissance transmise
P_i = Puissance incidente

Il ne faut pas oublier que dans un système l'énergie se conserve ! La puissance de l'onde incidente se répartit entre celle de la réfléchie et de la transmise !

$$P_i = P_r + P_t$$

Ondes stationnaires

Lorsque qu'une onde sinusoïdale rencontre un milieu d'impédance infinie, elle peut se superposer avec l'onde réfléchie, se forme alors une **onde stationnaire.**



Ceci est une onde stationnaire type. On distingue clairement des ventre et des nœuds. A noter que 2 nœuds (ou ventres) consécutifs sont espacés d'une demi longueur d'onde.

Dans le cas d'une corde, sa longueur vérifie : $L = \lambda/2$

Seules certaines fréquences de vibration peuvent exister telles que :
Où n correspond au nombre d'harmoniques.

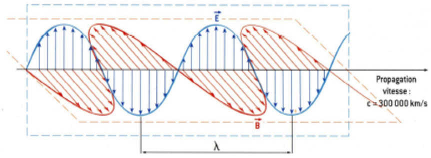
$$f_n = \frac{nc}{2L} = n f_1$$

Toutes les fréquences possibles sont donc des multiples de la fréquence fondamentale.

VI. Ondes électromagnétiques / Champ/ moment magnétique

OEM

Propagation de champs électrique et magnétique perpendiculaires entre eux. Ces derniers sont mesurés en soumettant les constituants de la matière à leur passage



Champ magnétique

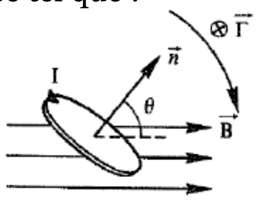
Il y a 2 sources du champ magnétique :
- ➔ L'aimant
- ➔ La bobine parcourue par un courant électrique

Vecteur champ magnétique :
- ➔ Noté vecteur $\vec{B}$
- ➔ Direction : celle d'une aiguille placée à côté d'une boussole
- ➔ Norme : valeur du champ magnétique au point considéré

Moment magnétique orbital

Une boucle de courant de surface A et d'intensité I soumise à un champ magnétique se comporte comme un aimant et est soumise à un couple de force tel que :

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}}$$



Où $\vec{\mu} = IA\hat{n}$ est le **moment magnétique orbital** perpendiculaire à la surface A
(avec n vecteur unitaire re normal au plan de la boucle).

Moment magnétique orbital d'une particule chargée

Soit une particule de charge q, masse m, en mouvement circulaire uniforme autour de O avec un rayon r, à une vitesse v.
Le déplacement de q donne l'intensité du courant : $\boxed{I = \frac{q}{2\pi r/v}}$
Le moment cinétique : $\boxed{L = mrv}$

DONC, en considérant le **moment cinétique orbital** ainsi que celle du **moment dipolaire magnétique** on obtient : $\boxed{\vec{\mu} = \frac{q}{2m}\vec{L}}$

Pour l'électron, ce moment est quantifié : $\mu_e = 10^{-23}$ c'est le magnéton de Bohr.

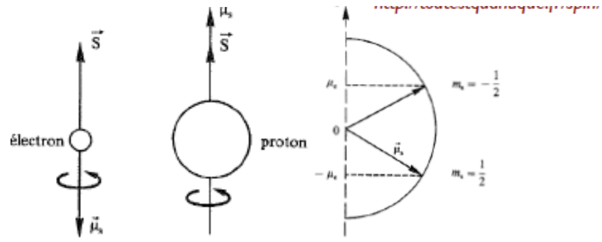
Moment cinétique intrinsèque

En plus du moment cinétique orbital, certaines particules possèdent un **moment cinétique intrinsèque le spin $\vec{S}$**. À ce spin est associé un **moment magnétique intrinsèque $\vec{\mu_S}$.**

Pour un **électron** : $\vec{\mu_S} = -g_e \frac{e}{2m_e}\vec{S}$
μ_s est dans le sens opposé à S et $g_e = 2$

Pour un **proton** : $\vec{\mu_S} = g_p \frac{e}{2m_p}\vec{S}$
μ_s est dans le même sens que S et $g_p = 5{,}58$.

La masse du proton est **2000x** plus grande que celle de l'électron



Pour un électron, le moment cinétique spin est **quantifié** est ne peut prendre que deux valeurs : **+ 1/2 et – ½**

Interaction avec un champ uniforme

Tout noyau atomique porte un moment magnétique **proportionnel à son moment cinétique global** $\vec{J}$: $\vec{\mu} = \gamma\vec{J}$ où γ est le rapport gyromagnétique.

En plaçant une particule avec un moment magnétique dans un champ uniforme et statique $\overrightarrow{B_0}$, il sera soumis à un couple de force tel que : $\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\Gamma} = \vec{\mu}\wedge\overrightarrow{B_0} = \gamma\vec{J}\wedge\overrightarrow{B_0}$

➔ **On a un mouvement de précession de J (et donc de μ) autour de Bo**

Cette précession se fait à une certaine vitesse angulaire et à une certaine fréquence, la **fréquence de Larmor**.

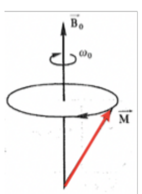
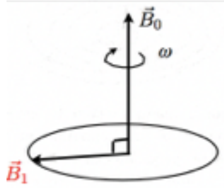
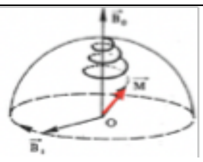
$\omega_0 = \gamma B_0$

Vitesse angulaire

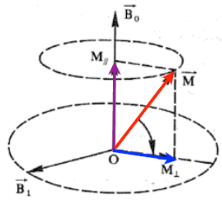
$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$

Fréqu de Larmor

VII. Le phénomène de RMN

	**Pré-Requis : Application d'un champ statique Bo.** On plonge un ensemble de noyaux dans un champ magnétique uniforme et statique Bo. L'ensemble des moments magnétiques individuels donne naissance à un m**oment magnétique macroscopique M en précession autour de Bo** à la vitesse angulaire $\omega_0$et à la fréquence de Larmor ν_0 .
	**Application du champ tournant B1.** On rajoute un champ B1, perpendiculaire à Bo et d'intensité plus faible que ce dernier tournant à la vitesse ω. Lorsque $\omega=\omega_0$ et $\nu = \nu_0$, M entre en précession autour de B1, **le champ tournant est en résonnance avec l'aimantation.**
	**Relaxation :** On éteint le champ tournant B1 pour retourner à la situation initiale. C'est là qu'ont lieu les différentes mesures.

$\vec{M}$ peut-être décomposé en :
- ***M*** // à la direction du champ statique Bo
- ***M***⊥ à la direction du champ statique Bo

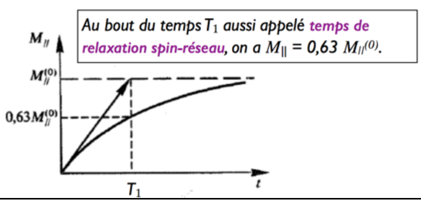
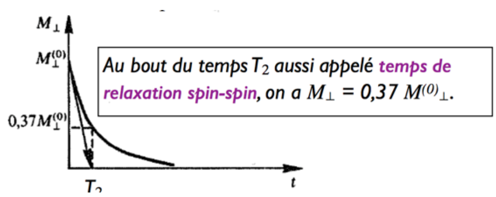


Il y a deux modèles pour décrire la RMN :

	Description quantique	**Description classique**
Principe	Variation d'énergie	Variation de coordonnées en spirale
A la résonnance :	**Absorption** d'énergie : transition de niveau d'énergie de valeur ΔE = hν	La composante // **diminue** et la composante ⊥ **augmente**
A la relaxation :	**Restitution** de l'énergie emmagasinée	La composante // **augmente** et la composante ⊥ **diminue**
Explication	Le champ radiofréquence, de fréquence ω_0, fait basculer les noyaux dans un état d'énergie supérieur quantifié, et son arrêt entraine la redescente énergétique.	On considère le mouvement de M uniforme , telle une suite de déplacements élémentaires quantifiés. On peut alors suivre la progression du vecteur dans les différents plans.

Temps de relaxation :

Pendant la relaxation, on mesure le **réalignement de M sur Bo** selon les deux composantes : longitudinale (parallèle) et transversale (perpendiculaire).

T1 = Temps de relaxation longitudinal – spin/réseau	**T2 = Temps de relaxation transverse spin/spin**
$M_{\parallel} = M_{\parallel}^{(0)} * [1 - \exp(-t/T_1)]$	$M_{\perp} = M_{\perp}^{(0)} * [\exp(-t/T_2)]$
• Re-croissance de M// • Au temps T1 : **M // = 0,63 M// (0)** de sa composante **FINALE**	• Dé-croissance de $M\perp$ • Au temps T2 : **M ⊥ = 0,37 M ⊥(0)** de sa composante **INITIALE**
Relation exponentielle croissante 	Relation exponentielle décroissante 

Application médicale : T1 et T2 sont propres à chaque tissu, ainsi, en fonction du temps de relaxation et de l'énergie libérée, on va pouvoir caractériser chaque tissu.