Variables aléatoires
Lois de probabilités discrètes et continues

On distingue 2 types de variables aléatoires :

Les **variables aléatoires discrètes** ⇨ Elles suivent des **lois de probabilité DISCRETES** :
- Loi de Bernoulli,
- Loi Binomiale,
- Loi de Poisson,
- Loi géométrique
- Loi hypergéométrique

Les **variables aléatoires continues** ⇨ Elles suivent des **lois de probabilité CONTINUES** :
- Loi exponentielle
- Loi uniforme
- Loi normale

I. Variables aléatoires, définition :

Exemples d'**épreuves** aboutissant à des **événements élémentaires** (= résultats aléatoires) :

- On tire au sort une gélule de médicament (= épreuve) produite par une chaîne de fabrication et on mesure la quantité de principe actif contenu (= événement élémentaire) à l'intérieur. → *La quantité de principe actif contenu dans chaque gélule est une variable aléatoire.*

  Nota : (On peut penser que la quantité de Principe Actif sera exactement dosée (= non aléatoire), en réalité de minimes variations ont lieu lors de la fabrication, rendant les résultats aléatoires)

- On tire au sort un homme adulte (= épreuve) dans une ville et on note son âge (= événement élémentaire) en années. → *L'âge est une variable aléatoire.*

- On tire au sort une carte (= épreuve) dans un jeu de 52 cartes, on regarde quelle est la carte (= événement élémentaire) → *La carte n'est pas une variable aléatoire car ce n'est pas un nombre.*

⇨ On parle de **variable aléatoire** lorsque le résultat aléatoire est un **nombre**.

Une variable aléatoire est une épreuve menant à des événements élémentaires qui sont des nombres.

Une variable aléatoire est dite :

- **Discrète**: si les résultats de l'expérience ont leur valeur dans un ensemble FINI (donc dénombrable), ou INFINI DENOMBRABLE comme par exemple un sous ensemble discret de $\boldsymbol{R}$ (= réels) comme $\boldsymbol{N}$ (= entier). *Exemple : L'âge d'une personne tirée au sort dans la population Niçoise.*

- **A densité** ou **continue absolue** : Si les résultats de l'expérience sont INDENOMBRABLES, si les résultats ont leur valeurs dans $\boldsymbol{R}$ ou un intervalle de $\boldsymbol{R}$. *Exemple : la quantité de Principe Actif dans les gélules.*

Nota :
- Si l'ensemble comprenant les résultats est un ensemble fini ou infini dénombrable, ⇨ toujours variable aléatoire.
- Si l'ensemble comprenant les résultats n'est pas dénombrable ⇨ il peut y avoir des exceptions.

II. Variable aléatoire discrète :

A. Loi de probabilités discrètes :

Soit « X » une variable aléatoire discrète sur un ensemble fondamental « Ω » à valeurs finies :
$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.

La Variable aléatoire « X » discrète obéie à une loi de probabilité.
Cette loi est définie par l'ensemble des probabilités p_n (p_1, p_2, p_3,…, p_n) de ses différentes éventualités x_n (x_1, x_2, x_3,…, x_n).

$\forall_i$ (quel que soit i), $p_i = P(X = x_i)$, et ce pour tout $0 \leq i \leq n$. On aura alors la loi de probabilités suivante :

$0 \leq p_i \leq 1$ $\sum_{0\leq i\leq n}(p_i) = 1$ *(la somme de l'ensemble des probabilités = 1)*

Exemple : Soit « A », la variable aléatoire « âge des étudiants tirés au sort dans la promotion de PAES ». Supposons que les valeurs de « A » aillent de 17 à 22 ans, alors les valeurs possibles prises par « A » sont : $a_1 = 17$, $A_2 = 18$, $A_3 = 19$, … , $A_6 = 22$.

On trouve à l'issue du tirage au sort de 100 étudiants parmi l'ensemble de la promotion, les probabilités suivantes : p1 = p(17ans) = 5/100, p2 = p(18 ans) = 20/100, p3 = p(19 ans) = 40/100, p4 = p(20 ans) = 25/100, p5 = p(21 ans) = 8/100, p6 = p(22 ans) = 2/100.

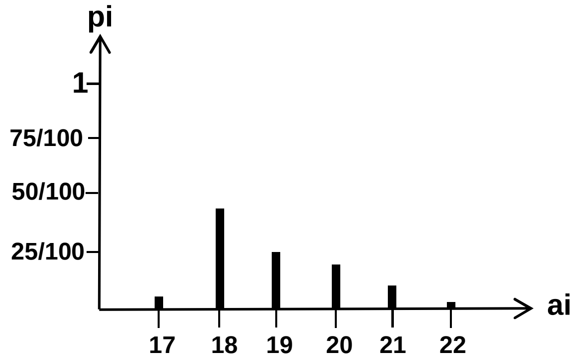
Toutes les probabilités sont comprises entre 0 et 1 : $0 \leq p_1 / p_2 / p_3 / p_4 / p_5 / p_6 \leq 1$
La somme des probabilités : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{5}{100} + \frac{20}{100} + \frac{40}{100} + \frac{25}{100} + \frac{8}{100} + \frac{2}{100} = 1$

B. Représentation :

1. Sous forme de tableau :

ai	17	18	19	20	21	22
pi	5/100	40/100	25/100	20/100	8/100	2/100

2. Sous forme de diagramme en bâton :



C. Notion de moyenne / Esperance mathématique:

1. Moyenne

Soit l'épreuve « tirer au sort un étudiant dans la promotion et lui demander son âge».
La variable aléatoire est l'âge de l'étudiant tiré au sort.
A chaque tirage, on obtient une valeur « ai » ($a_1 = 17$, $a_2 = 18$,.., $a_6 = 22$) que l'on note.
On obtient pour chaque valeur « ai » une proportion « pi» de l'ensemble des étudiants tirés au sort.

Afin d'avoir une idée de l'âge approximatif de la promotion, on cherche à « résumer » l'ensemble des valeurs obtenues.
On calcule pour cela la moyenne (µ) des résultats obtenus :

$$\mu = p_1 \times a_1 + p_2 \times a_2 + \ldots + p_n \times a_n = \Sigma_{0 \leq i \leq n} (p_i\ a_i)$$

Exemple: On garde les données de l'exemple précédent. 100 étudiants ont été tirés au sort.
$\mu = p_1 \times a_1 + p_2 \times a_2 + p_3 \times a_3 + p_4 \times a_4 + p_5 \times a_5 + p_6 \times a_6$
= 0,05x17 + 0,40x18 + 0,25x19 + 0,20x20 + 0,08 x 21 + 0,02x22 = 18,92 (cette valeur n'a aucune signification en réalité. On dira que l'âge moyen est de 19 ans)

2. Espérance (= moyenne)

L'Esperance mathématique est le terme utilisée en « Statistique », pour exprimer la « **moyenne** ».
On la note **E(X)** (X étant la variable aléatoire).
Elle cherche à traduire la **tendance centrale de la variable aléatoire**.
C'est un **indicateur de POSITION** sur la distribution de probabilité de X.

3. Théorèmes de l'Esperance :

- Soit « X » une variable aléatoire et « k » un nombre réel : $E(kX) = k\,E(X)$ $\quad E(X+k) = E(X) + k$
- Soit « X » et « Y » deux variables aléatoires, on a : $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- Soit « n » variables aléatoires, « l'Espérance de la somme est la somme des Espérances » :

$$E\left(\Sigma_{0 \leq i \leq n} X_i\right) = \Sigma_{0 \leq i \leq n} \left(E(X_i)\right)$$

D. Variance et Ecart Type :

La **Variance** est un **indicateur de DISPERSION**.

Elle caractérise l'éloignement des valeurs « xi » prises par la variable aléatoire « X » par rapport à la moyenne « µ ».

On note la variance σ^2, et l'écart type σ est la racine carré de la variance.

$$\sigma^2 = Var(X) = \Sigma_{0 \leq i \leq n}\ pi\,(xi - \mu)^2$$

en terme « statistiques » : $\sigma^2 = Var(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$

Pour « a » un réel quelconque, on aura :

$$Var(X + a) = Var(X)$$
$$Var(aX) = a^2\,Var(X)$$

Exemple : Soit un échantillon de 300 étudiants de PAES. Ont lieu le 1er et le 2e tutorat.

Tutorat n°1 d'UE4, la moyenne est de 12/20.
100 étudiants ont eu 11/20, 100 ont eu 12/20 et 100 ont eu 13/20.
$\sigma^2 = 100/300 \times (11 - 12)^2 + 100/300 \times (12 - 12)^2 + 100/300 \times (13 - 12)^2 \approx 0,66$ ⇨ Très faible dispersion.

Tutorat n°2 d'UE4, la moyenne est de 12/20.
100 étudiants ont eu 6/20, 100 ont eu 12/20 et 100 ont eu 18/20.
$\sigma^2 = 100/300 \times (6 - 12)^2 + 100/300 \times (12 - 12)^2 + 100/300 \times (18 - 12)^2 = 24$ ⇨ Très forte dispersion, pour une moyenne identique.

E. Variable centrée réduite :

« Centrée »: consiste à soustraire la moyenne« μ »de la variable à chacune de ses valeurs initiales
« Réduite »: consiste à diviser toutes les valeurs que prend la variable par son écart-type « σ »

Soit X , variable aléatoire de moyenne« μ »et d'écart type« σ ». On définit la variable centrée réduite Y :

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

2 propriétés de la « Variable centrée réduite » : **E(Y) = 0 et Var (Y) = 1 → σ = 1**

Nota : L'intérêt de « transformer » les variables en « variables centrées réduites », notamment dans le cadre de la loi Normale, est d'obtenir des données indépendantes des unités (= sans dimensions) et des variables ayant une moyenne (μ = 0) et une dispersion (σ = 1) identique.

De cette façon, il est possible d'utiliser une seule table de probabilité (table de la loi Normale centrée réduite) pour déterminer la probabilité de n'importe quelles variables !

Exemple 1 : 5 élèves de CM1 font un devoir de math. Voici leur note sur 20, la moyenne et l'écart type.

						Moyenne (μ)	Ecart type (σ)
X : Note /20	4	8	12	17	19	12	5,06
$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$	- 1,58	- 0,79	0	0,98	1,38	0	1

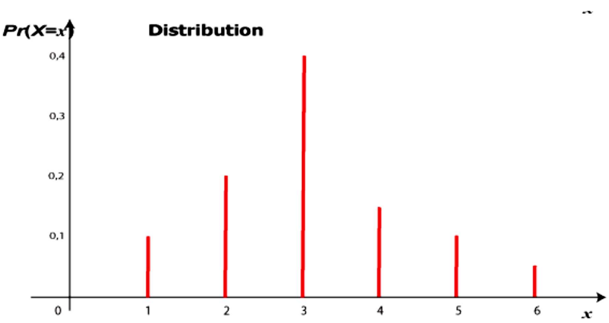
Exemple 2 : 5 élèves de CM1 sont pesés lors de la visite médicale. Voici leur poids en kg, la moyenne et l'écart type.

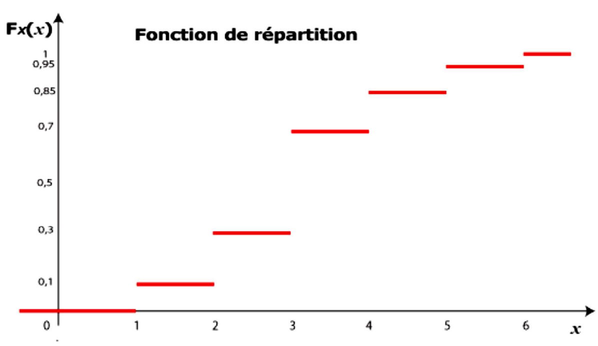
						Moyenne (μ)	Ecart type (σ)
X : poids en kg	37	39	41	42	45	40,8	2,71
$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$	- 1,40	- 1,03	0,07	0,44	1,54	0	1

F. Fonction de répartition / distribution:

Représentation de la Fonction de Distribution :

Distribution de probabilités (diagramme en Bâtons) d'une variable aléatoire finie (discrète)





Représentation de la Fonction de Répartition :

La fonction de répartition est une fonction en escalier (discontinue dans le cas des variables aléatoires discrètes). On parle de fonction cumulative, car elle somme toute les probabilités « pi » correspondant aux « xi » survenus avant « x ». La fonction de Répartition est monotone croissante* ⇨ Si a ≤ b alors F(a) ≤ F(b)

** le sens de variation de la fonction ne change pas. Elle reste croissante.*

III. Les lois de probabilité discrète :

Loi	Paramètres	Loi de probabilité	Espérance Variance	Conditions d'utilisation
Bernouilli $X \sim \mathcal{B}(p)$	**p** : probabilité d'un succès **q** = 1 – p : proba d'un échec **X** : « Nombre de succès au cours de l'épreuve » = 1 ou 0	**P(X = 1 = succès) = p** **P (X = 0 = échec) = q**	$\mu = p$ $\sigma^2 = pq$	

<u>Définition</u> : Une épreuve de Bernoulli est une épreuve unique dont l'issue est soit « succès » soit « échec ».

<u>Exemple</u> : Je lance un dé. Je cherche à obtenir un « 6 ». P(succès) = p = 1/6 . P(échec) = q = 5/6

Binomiale $X \sim \mathcal{B}(n\ ;\ p)$	**n** : nombre d'essais indépendants **p** : proba d'un succès **q** : proba d'un échec **X** : « Nombre de succès à l'issue des n essais »	$\mathbf{P\ (X = k) = C_n^k\ p^k\ q^{n-k}}$ $0 \leq k\ (= \text{nb succès}) \leq n$	$\mu = np$ $\sigma^2 = npq$	$\mathbf{n/N \leq 0,10}$ *n : échantillon* *N : population* Si n>50 & p ≤ 0,10 ⇨ <u>loi de Poisson:</u> $\boldsymbol{P(\lambda = np)}$ Si np ≥ 5 & nq ≥ 5 ⇨ <u>Loi Normale</u> : $\boldsymbol{N(np; \sqrt{npq})}$

<u>Définition</u> : C'est une **épreuve répétée de Bernoulli.** On réalise **n** essais **indépendants** d'une même expérience aléatoire ayant pour issue soit un « succès », soit un « échec ».

Dans le cas de de la constitution d'un échantillon par Tirage Au Sort, on distingue 2 situations :

1ère situation : Le tirage est <u>non exhaustif</u> (= indépendant)⇨ les éléments sélectionnés sont remis dans l'échantillon après le tirage (= tirage « avec remise ») ⇨ « p » reste alors constant.

2ème situation : Le tirage est <u>exhaustif</u> (= dépendant des autres tirages) ⇨ Il n'y a pas de remise, « p » varie donc au fils des tirages. On définit alors le **taux de sondage = n / N**. Si $\mathbf{n/N \leq 0,10}$, on peut appliquer la <u>loi Binomiale</u>, Si $\mathbf{n/N \geq 0,10}$ ⇨ on appliquera la <u>loi Hypergéométrique</u>.
On considère que la <u>loi Binomiale</u> reste valable lorsque la taille de la population « **N** » est très grande comparée à la taille de l'échantillon « **n** ». ($\mathbf{N \geq 10\ n}$) **.** Les variations de « p » sont alors négligeables.

<u>Propriétés :</u>
- Pour **p = 0,5** la distribution Normale est symétrique autour de µ (exemple : obtenir pile/face quand on lance une pièce) pour tout « **n** ».
- Si **p ≠ 0,5**, la distribution est asymétrique négative pour p ≤ 0,5 et inversement.
- Quand **« n »** est grand, la forme de la représentation graphique devient symétrique.
- Si « **n »** est grand et « **p »** pas trop proche de 0 ou 1, on tend vers la <u>loi Normale</u>

<u>Exemple</u> : Je lance un dé 3 fois. Je cherche à connaitre la probabilité d'obtenir 2 succès, soit 2 « 6 » exactement lors de ces 3 lancers ⇨ p = 1/6, q = 5/6, n = 3, k = 2 succès <u>exactement</u> parmi 3 lancers

Probabilité d'avoir 2 succès = $p^k\ q^{n-k} = p^2\ q^{3-2} = p^2\ q^1$ *= 1/6 x 1/6 x 5/6 = 5 / 216*

Cependant, l'ordre des « succès » n'est pas important ! Donc je peux avoir <u>plusieurs Combinaisons</u> de succès lors de cette expérience ⇨ $C_3^2 = 3$ *combinaisons possibles !*
- *Combinaison 1 :1er lancer = <u>succès</u>, 2ème lancer = <u>succès</u>, 3ème lancer = échec*
- *Combinaison 2: 1er lancer = <u>succès</u>, 2ème lancer = échec, 3ème lancer = <u>succès</u>*
- *Combinaison 3: 1er lancer = échec, 2ème lancer = <u>succès</u>, 3ème lancer = <u>succès</u>*

<u>Donc au final</u> : $\boldsymbol{P\ (X = 2) = C_3^2\ p^2\ q^{3-2}}$ ***= 3 x 1/6 x 1/6 x 5/6 = 15/216***

Loi	Paramètres	Loi de probabilité	Espérance et Variance	Conditions d'utilisation
Poisson $X \sim \mathfrak{P}(\lambda)$	**λ** : Nombre moyen d'événements apparaissant dans un laps de temps (ou unité de volume, surface, etc …)	$\mathbf{P\ (X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}}$ $0 \leq k\ (= \text{nb succès}) \leq n$	$\mu = \lambda$ $\sigma^2 = \lambda$	$\lambda \leq 25$ Si $\lambda \geq 25$ ⇨<u>loi Normale</u> : $N(\lambda; \sqrt{\lambda})$

<u>**Définition**</u> : La <u>loi de Poisson</u> est utilisée le plus souvent pour déterminer la probabilité qu'un certain nombre d'événements interviennent sur la base d'une unité de temps. Elle est aussi utilisée pour déterminer la probabilité qu'un certain nombre d'événements se produise sur la base d'autres unités : volume, surface, etc….

<u>Exemple</u> : Le nombre d'appels téléphoniques reçus par heure dans une centrale de télécommunication :
La loi de poisson pourra nous donner la probabilité de recevoir « X » appels en 1 h, sachant que la moyenne du nombre d'appels reçu par heure est de « λ ».

X = k (je veux savoir quelle est la probabilité d'obtenir k appel en une heure)
λ = 6 (il y a en moyenne 6 appel par heure)

<u>Pour k = 4</u> : P (X = k = 4) = $\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-6}6^4}{4!}$ *(k est un entier naturel)*

<u>Pour k = 6</u> : P (X = k = 6) = $\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-6}6^6}{6!}$ *(k est un entier naturel)*

<u>Pour k = 7</u> : P (X = k = 7) = $\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-6}6^7}{7!}$ *(k est un entier naturel)*

Géométrique $X \sim \mathfrak{G}(\mathbf{p})$	**p** : proba d'un succès **q** : proba d'un échec **X** : « Nombre d'essais nécessaire jusqu'au 1er succès »	$\mathbf{P\ (X = k) = p\ q^{k-1}}$ $k\ (= \text{entier naturel} > 0)$	$\mu = \frac{1}{p}$ $\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$	

<u>**Définition**</u> : Il s'agit, comme pour la loi Binomiale, d'une succession d'épreuves de Bernoulli. Cette loi est utilisée pour déterminer la probabilité d'obtenir un succès au bout d'un certain nombre d'essai.

En clair, on répète l'expérience de Bernoulli (succès/échec) jusqu'à obtenir UN succès. L'épreuve s'arrête dès l'obtention du premier succès. On comptabilise alors le nombre d'essais qui ont été nécessaires pour obtenir ce <u>premier succès</u>.
L'idée étant de connaître la probabilité d'avoir dû faire « X » essais pour obtenir ce succès.

<u>Exemple</u>:
Je lance un dé. Je cherche à connaître la probabilité d'obtenir un « 3 » ou un « 6 » au bout de 3 lancers (k = 3).

1er lancer : « 1 » = échec
2ème lancer : « 4 » = échec
3ème lancer: « 6 » = succès

p = probabilité d'obtenir {3 ;6}, soit un succès = 1/3.
q = probabilité d'obtenir {1 ;2 ;4 ;5}, soit un échec = 1 – Proba d'obtenir {3 ;6} = 2/3

P (X = k = 3) = p q^{k-1} *= (1 / 3) x* $(2/3)^{3-1}$ *= (1 / 3) x* $(2/3)^2$

Loi	Paramètres	Loi de probabilité	Espérance et Variance	Conditions d'utilisation
Hyper Géométrique $X \sim \mathfrak{H}(N\,;D,n)$	**N** : Population **D** : Nb d'individus parmi « N » présentant le caractère donné. **n** : Echantillon **X** : « Nb d'individus de l'échantillon possédant la propriété envisagée »	$P(X = k) = \frac{C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$ $k = \min(0; nD)$, $\max\ (n\,;D)$	$\mu = \frac{nD}{N}$ $\sigma^2 = \frac{nD}{N} \times \frac{N-D}{N} \times \frac{N-n}{N-1}$	

__Définition :__ Soit une population de « N » individus dont un nombre « D » présente un caractère donné. On utilise la loi HYPERGEOMETRIQUE lorsqu'on veut connaitre la probabilité d'obtenir « X » individus présentant ce caractère dans un échantillon de « n » individus, issu de la population « N ».

Les individus de l'échantillon « n » sont tirés simultanément (l'ordre de tirage n'a pas d'importance), mais NE SONT PAS REMIS DANS LA POPULATION « N » après le tirage!

Il n'y a donc PAS DE REMISE, contrairement aux lois Binomiales et Géométrique, où chaque tirage (ou essai) est indépendant (= équivaut à une remise) ou assimilé comme tel.

Nota : le rapport $\frac{D}{N} = p$ exprime la probabilité au sein de la population d'avoir la caractéristique donnée.

Exemple : Une urne contient 100 boules : 90 sont blanches et 10 sont Rouges. Je tire simultanément 5 boules au hasard sans les remettre. N = 100 ; D = 10 ; n = 5 ; p(Rouge) = 10%

Je souhaite connaître la probabilité d'obtenir: 1 boule Rouge (k = 1), 5 boules Rouges (k = 5).

k = 1 : $P(X = 1) = \frac{C_{10}^1 \times C_{100-10}^{5-1}}{C_{100}^5} = \frac{C_{10}^1 \times C_{90}^4}{C_{100}^5}$

k = 5 : $P(X = 5) = \frac{C_{10}^5 \times C_{100-10}^{5-5}}{C_{100}^5} = \frac{C_{10}^5 \times C_{90}^0}{C_{100}^5}$

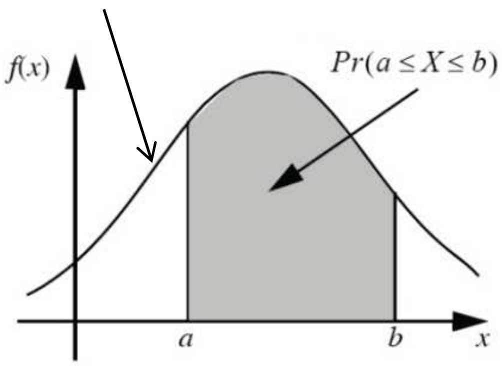
IV. Variables aléatoires continues :

A. Densité de probabilité:

Une variable aléatoire continue a une probabilité nulle d'être égale à un nombre donné.
En effet, l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire continue est contenue dans un intervalle.

Exemple :
La probabilité qu'un étudiant en PAES pèse 70,0000000…0.. kg est nulle.
En revanche la probabilité pour qu'un étudiant en PAES pèse entre 70 et 71 kg n'est pas nulle !
On parlera alors de probabilité pour « X » compris dans un intervalle : P(70 ≤ X ≤ 71).

Fonction de densité : f(x)



La probabilité P(a ≤ X ≤ b) est la surface sous la courbe entre a et b

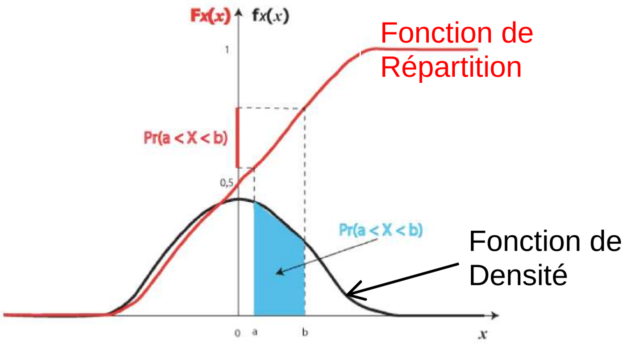
On définit la loi de probabilité de X (= distribution de X), grâce la fonction f(X) appelée densité de probabilité de X.

B. Fonction de répartition:

La fonction de répartition F(X) « est l'intégrale » de la fonction de densité f(x) : F(X) = $\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$

La différence F(b) – F(a) correspond à la probabilité représentée par l'aire sous la fonction de densité !

La fonction de répartition nous permet donc de déterminer directement la probabilité d'un intervalle :
a ≤ X ≤ b ⇨ P(a ≤ X ≤ b)



Propriétés de la fonction de répartition :
- Monotone croissante (comme pour les variables discrètes)
- P(a ≤ X ≤ b) est la différence des hauteurs F(b) - F(a) si on utilise la fonction de répartition.
- Contrairement au cas des variables discrètes, la fonction de répartition est ici continue.

V. Loi de probabilité continue

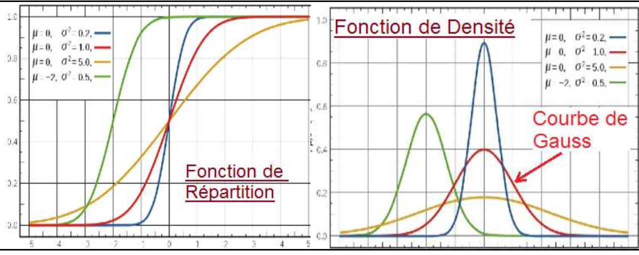
<table>
<tr><th>Loi</th><th>Paramètres</th><th>Fonction de Répartition</th><th>Espérance et Variance</th></tr>
<tr><td>Exponentielle
$X \sim \mathfrak{E}(\lambda)$</td><td>$\boldsymbol{\lambda}$: Taux de défaillance instantané
X : Variable aléatoire
x : nombre réel</td><td>$\boldsymbol{P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1 - e^{-\lambda x}}$</td><td>μ = $\frac{1}{\lambda}$
σ^2= $\frac{1}{\lambda^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Définition : La loi exponentielle est utilisée pour décrire un phénomène de « mortalité » (ou survenue d'un événement) dans lequel « le risque instantané » (taux de défaillance) de « décès » est constant*
(*c'est-à-dire si la durée de vie au-delà de l'instant « t » est indépendante de l'instant « t »)

Nota : Lien avec la loi de Poisson : Si un évènement se réalise selon une loi de poisson de paramètre λ, alors le temps entre 2 réalisations consécutives de l'événement est distribué selon une loi exponentielle de paramètre 1/λ.

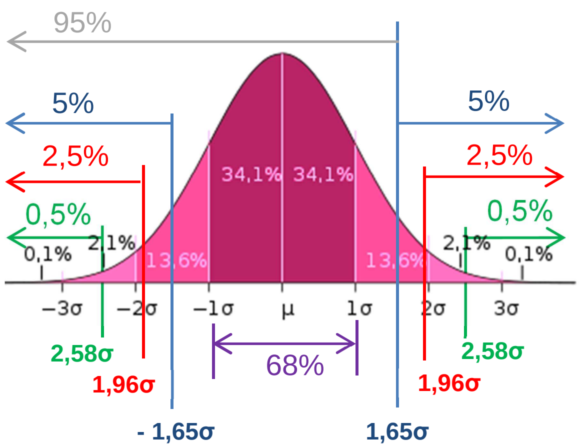
$\boldsymbol{P(X \leq x)}$ signifie : « probabilité que l' « événement » survienne avant l'instant $t = \boldsymbol{x}$ »

Exemple : Un domaine privilégié de la loi exponentielle est le domaine de la radioactivité.
La radioactivité est un phénomène aléatoire. Un nucléide instable est destiné à se désintégrer, ou il disparaît spontanément de manière aléatoire (la désintégration est régie par le hasard, on ne peut pas connaître l'instant auquel l'évènement se produira...)
La constante radioactive λ : probabilité pour le noyau de se transformer par unité de temps → C_6^{14} : λ = 1/10000 par an</td></tr>
<tr><td>Uniforme
$X \sim \mathfrak{U}([a\,;b])$</td><td>Intervalle $[a\,;b] \in R$
$\boldsymbol{x}$: nombre réel, $\in [a\,;b]$
X : Variable aléatoire</td><td>$\boldsymbol{P(X \leq x) = \int_a^x \frac{1}{(b-a)}\,dx}$</td><td>μ = $\frac{(a+b)}{2}$
σ^2= $\frac{(b-a)^2}{12}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Définition : On utilise une loi Uniforme lorsque entre un point a et un point b, la densité de probabilité est toujours égale entre ces deux points et nulle ailleurs.

Exemple : Morgane doit se rendre à une soirée chez Victoria. Elle lui indique qu'elle passera entre 20h et 21h. L'heure d'arrivée de Morgane suit une loi de probabilité Uniforme d'intervalle [20 ; 21] (= [0 ; 1]).
Application : La probabilité pour Morgane d'arriver à 20h20 est ... nulle ! Effectivement, une variable aléatoire continue a une probabilité nulle d'être égale à un nombre donné (ou un instant précis dans le présent cas). En revanche la probabilité pour Morgane d'arriver au plus tard à 20h20 soit 20' (ou 1/3 h) après 20h est de :
$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 20\mathrm{h}20) = \mathrm{P}\left(\mathrm{X} \leq \frac{1}{3}\right) = \int_0^{1/3} \frac{1}{(1-0)}\,\mathrm{dx} = [1]_0^{1/3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$</td></tr>
</table>

Loi	Paramètres	Fonction de Répartition / Densité	Espérance et Variance
Normale $X \sim \mathfrak{N}(\mu\,;\sigma)$ ♥	Espérance : **μ** Ecart type : **σ** X :Variable Aléatoire		Espérance : μ Variance : σ^2 Ecart type : σ

Définition : La loi Normale est une des principales distributions de probabilité. La courbe représentative de la fonction de densité est appelée courbe de Gauss. L'aire sous la courbe délimitée par un intervalle représente la proportion d'individu (ou probabilité de la survenue d'un évènement) d'être dans cet intervalle.

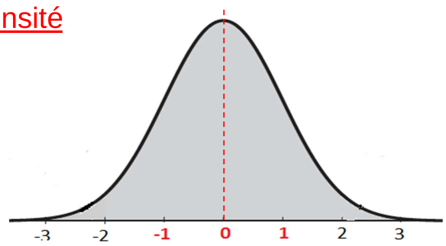


De nombreux phénomènes naturels (ex : taux d'hématocrite d'une population, Quotient Intellectuel, etc) suivent une distribution très proche de celle de la loi Normale, et forme cette courbe en cloche.

Cette courbe correspond à une grande proportion d'individus autour de la moyenne (μ), et de moins en moins au fur à mesure qu'on s'en éloigne. Elle est symétrique autour de μ.

Valeurs limites à connaître par ♥ :
P(X < μ - 1,65 σ ou X > μ + 1,65 σ) = 10%
P(X < μ - 1,96 σ ou X > μ + 1,96 σ) = 5%
P(X < μ - 2,58 σ ou X > μ + 2,58 σ) = 1%
P(X < μ - 3,30 σ ou X > μ + 3,30 σ) = 0,1%
P (μ - σ < X < μ + σ) = 68%

Exemple : *La taille « X » des hommes adultes suit une loi Normale de moyenne* ***μ = 180 cm*** *et d'écart type* ***σ = 6 cm****.*
- *La proportion d'homme dont la taille est* ***comprise entre*** *174 cm (μ-σ) et 186 cm (μ+σ) est de 68%.*
- *La proportion d'homme dont la taille est* ***inférieure*** *à 168,2 cm (μ - 1,96σ)* ***ou supérieure*** *à 191,8 cm (μ + 1,96σ) est de 2,5% + 2,5% = 5%*
- *La proportion d'homme dont la taille est* ***supérieure*** *à 189,9 cm (μ + 1,65σ) est de 5%.*
- *La proportion d'homme dont la taille est* ***inférieure*** *à 189,9 cm (μ + 1,65σ) est de 95%.*

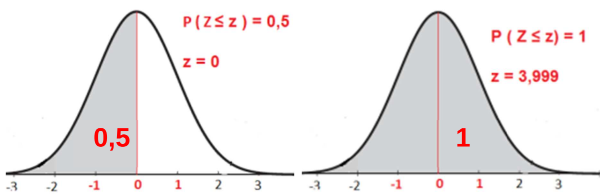
Loi	Paramètres	Fonction densité	Espérance et Variance
Normale centrée réduite $X \sim \mathfrak{N}(0\,;1)$	Changement de variable : $X \to Z$ $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$	Fonction densité μ = 0 σ = 1 	Espérance = 0 Variance = 1 Ecart type = 1

Définition : La loi Normale centrée réduite est un cas particulier de la loi Normale, où μ = 0 et σ = 1.

Lorsqu'une variable aléatoire « X » suit une loi Normale dont le comportement nous ait inconnu, on procède à un changement de variable $X \to Z$ afin de ramener la variable « X » à une variable « Z » (variable centrée réduite, voir chapitre II.E de cette fiche) dont on connait le comportement.

En effet, il existe une « Table de la loi normale centrée réduite » qui donne la probabilité pour que la variable « Z » soit **inférieure** à « z » ($z = \frac{x-\mu}{\sigma}$).

La probabilité trouvée pour que la variable centrée réduite « Z » soit **inférieure** à « z » est égale à celle pour que la variable « X » soit **inférieure** à « x » !



/!\ La table de la loi normale centrée réduite donne les probabilités de Z pour $0 \leq z \leq 3{,}999$

__Exemple__ (suite du précédent): La taille « X » des hommes adultes suit une loi Normale de moyenne ***µ = 180 cm*** *et d'écart type* ***σ = 6 cm****.*

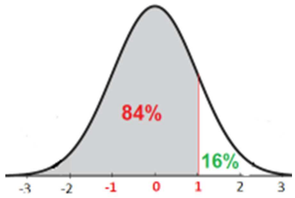
Je cherche par exemple la proportion d'homme dont la taille est ***__inférieure__*** *à x = 189,9 cm.*

- ⇨ *Je change de variable $x \to z$: $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{189{,}9-180}{6} = 1{,}65$*
- ⇨ *Je cherche dans la Table de la loi normale centrée réduite $P(Z \leq z = 1{,}65)$: Je lis « 0,9505 »*
- ⇨ *Si $P(Z \leq z = 1{,}65) \approx 0{,}95$ alors $P(X \leq x = 189{,}9) \approx 0{,}95$*
- ⇨ *La proportion d'homme mesurant* ***__moins__*** *de 189,9 cm est donc approximativement de 95%*

Table de la loi Normale centrée réduite				
z	**0,00**	**…**	**0,05**	**…**
0,0	0,5000	…	0,5199	…
…	…	…	…	…
1,6	0,9452	…	0,9505	…

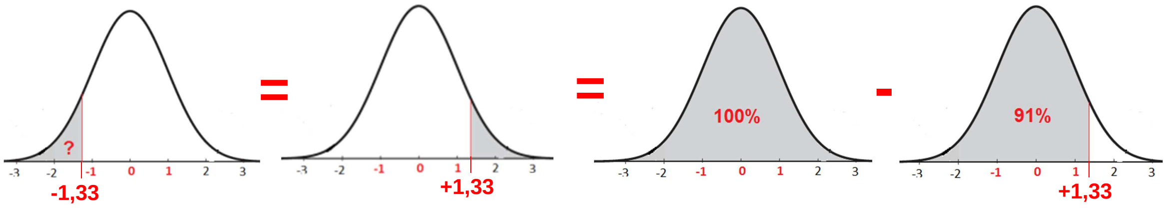
Je cherche maintenant la proportion d'homme dont la taille est ***__supérieure__*** *à x = 186 cm*

- ⇨ *Je change de variable $x \to z$: $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{186-180}{6} = 1{,}00$*
- ⇨ *Je cherche dans la Table de la loi normale centrée réduite $P(Z \leq z = 1{,}00)$: Je lis « 0,8413 »*
- ⇨ *Si $P(Z \leq z = 1{,}00) \approx 0{,}84$ alors $P(X \leq x = 186) \approx 0{,}84$ …Seulement je cherche $P(X > x = 186)$!*
- ⇨ *$P(X > x = 186) = 1 - P(X \leq x = 186) = 1 - 0{,}84 = 0{,}16$*
- ⇨ *La proportion d'homme mesurant* ***__plus__*** *de 186 cm est donc approximativement de 16%*



Je cherche maintenant la proportion d'homme dont la taille est ***__inférieure__*** *à x = 172 cm*

- ⇨ *Je change de variable $x \to z$: $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{172-180}{6} = -1{,}33$*
- ⇨ *$z = -1{,}33$, or la Table de la loi normale centrée réduite propose seulement $P(Z \leq z)$ pour $z \geq 0$, je cherche donc $P(Z \leq z = +1{,}33)$. Je lis « 0,9082 »*
- ⇨ *Si $P(Z \leq z = +1{,}33) \approx 0{,}91$ alors $P(Z \leq z = -1{,}33) \approx 1 - 0{,}91 \approx 0{,}09$, donc $(X \leq x = 172) \approx 0{,}09$.*
- ⇨ *La proportion d'homme mesurant* ***__moins__*** *de 172 cm est donc approximativement de 9%*



VI. Approximation

A. __Loi binomiale ⇨ Loi de Poisson :__

Lorsqu'un phénomène suit une __loi Binomiale__, si **n >50**, **p ≤ 0,**1 et donc **np < 5**, la __loi de poisson__ permet d'approximer la __loi Binomiale__ de la manière suivante :

$$\boldsymbol{B\ (n\ ;p)\ \to\ P\ (\lambda\ =\ np)}$$

B. __Loi Binomiale ⇨ Loi normale:__

Lorsqu'un phénomène suit une __loi Binomiale__, si **np ≥ 5** et **nq ≥ 5**, la __loi Normale__ permet d'approximer la __loi Binomiale__ de la manière suivante :

$$\boldsymbol{B\ (n\ ;p)\ \to\ N\ (np\ ;\sqrt{(npq)}\ )}$$

C. __Loi de Poisson ⇨Loi normale :__

Lorsqu'un phénomène suit une __loi de Poisson,__ si **λ > 25**, la __loi Normale__ permet d'approximer la __loi de Poisson__ de la manière suivante :

$$\boldsymbol{P\ (\lambda)\ \to\ N\ (\ \lambda\ ;\sqrt{\lambda}\ )}$$