Probabilités élémentaires et dénombrements

Introduction aux probabilités, ensembles

Le terme « statistique » peut se présenter comme une science, une grandeur ou encore un ensemble d'activités. Dans les statistiques, on retrouve des populations qui sont un ensemble d'objets de même nature.

L'étude de tous les éléments de cette population est très compliquée, et c'est pourquoi on a recours au système **d'échantillonnage**. Cela pose deux problèmes : on n'observe que **partiellement** la population et les individus de l'échantillon sont **différents** à chaque fois que l'on change d'échantillon.

I. DÉFINITIONS

Ensemble : Liste ou collection d'objets définis. *Ex : les étudiants en PACES.*

Élément de l'ensemble : Objet appartement à l'ensemble. *Ex : vous-même au sein de l'ensemble « étudiants en PACES ».*

→ L'ensemble peut se définir en **extension** (=explicite), on **liste** tous les éléments un à un. *Ex : A = {a, b, c, d, e}.*

→ Il peut aussi se définir en **compréhension** (=implicite), on donne **des propriétés** caractérisant les éléments. *Ex : B = {x : x est une voyelle}.*

Quelques notions :

- p est un **élément** de **l'ensemble** A signifie que p **appartient** à A ($p \in A$).
  Ex : 1 appartient à l'ensemble A : {1 ; 2 ; 3}.
- L'ensemble B est une **partie** de l'ensemble A signifie que B est compris dans A ($B \subset A$). *Ex : B : {1 ; 2} est une partie de A : {1 ; 2 ; 3}.*
- L'ensemble vide est $\emptyset$.
- L'univers est Ω.

II. OPÉRATIONS

1. L'intersection

Cette opération se note **« A ∩ B »** (A et B sont deux ensembles). Elle signifie que l'élément appartient à la fois à A **ET** à B, il se trouve donc à **l'intersection** des deux ensembles.

Il existe un cas particulier où **$A \cap B = \emptyset$,** c'est-à-dire qu'il n'y a pas de solution. Dans ce cas, les deux ensembles sont dits **« disjoints »**, ils ne se superposent pas. Ainsi, un élément appartenant à A **ne pourra pas** appartenir à B et vice versa.

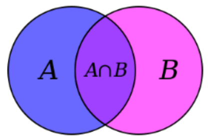


Schéma d'une intersection, l'élément appartient à la fois à A et à B.

2. La réunion (à ne pas confondre avec l'île)

Cette opération se note « A ∪ B ». Elle signifie que l'élément appartient **soit à A, soit à B, soit aux deux en même temps.**

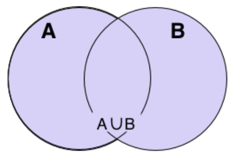


Schéma d'une réunion.

3. Le complémentaire

Notée $\complement A$ ou $\bar{A}$ ou A^c : complémentaire représente **tout ce qui n'appartient pas à l'ensemble** en question.

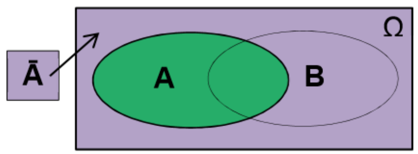
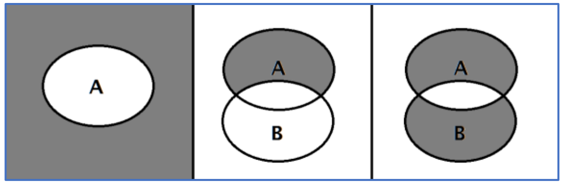


Schéma du complémentaire de A

4. La différence et la différence symétrique

Ces deux opérations ont un nom similaire mais sont très différentes. La première est tout simplement notée **A-B** et représente ce qui appartient à A, mais qui n'appartient pas à B. La **différence symétrique**, elle, représente tout ce qui appartient à A ou à B, sans appartenir à **A ∩ B.**

On la note **AΔB = AUB - A∩B**



Schémas de gauche à droite : complémentaire, différence et différence symétrique.

5. Opérations importantes à connaître

Désolé pour le vieux copier-coller du diapo, mais bon je pense que c'est important de savoir jongler avec les différentes opérations (ne vous inquiétez pas, **il n'est pas nécessaire d'apprendre tout ça par cœur**, une fois que vous avez compris c'est juste de la **logique**).

$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \Omega = A$
$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
$A \cup \complement A = \Omega$	$A \cap \complement A = \varnothing$
$\complement \complement A = A$	$\complement \Omega = \varnothing, \complement \varnothing = \Omega$
$\complement (A \cup B) = \complement A \cap \complement B$	$\complement (A \cap B) = \complement A \cup \complement B$

III. ENSEMBLES

1. Les différents types d'ensembles

En statistiques, différents types d'ensemble existent. On retrouve ainsi :

Ensembles finis	Ensembles infinis	
	Dénombrables	**Indénombrables**
Ensemble **nul**, ou contenant un **nombre fini** d'éléments). *Ex : A = {1 ; 2 ; 3}*	Chaque éléments peut être **compté** *Ex : l'ensemble des entiers naturels (1, 2, 3, 4, 5 …)*	On ne **peut pas compter** tous les éléments *Ex : l'ensemble des réels (1, 1.1, 1.11, 1.111 …), on ne peut pas tout compter **car il y a une infinité de nombres entre 1 et 2** par exemple)*

2. Les ensembles produits

Soient deux ensembles : A et B. L'ensemble produit de A et B est l'ensemble des couples **ordonnés (a ; b)**, avec a ∈ A et b ∈ B. Pour calculer le nombre de couples possibles d'un ensemble produit, il faut faire :

Card(A) * Card(B)

avec Card(A) le nombre d'éléments de l'ensemble A.

*Ex : si A : {rouge ; bleu} et B : {1 ; 2 ; 3}, alors l'ensemble produit de A et B est { (rouge ; 1),(rouge ; 2),(rouge ; 3),(bleu ; 1),(bleu ; 2),(bleu ; 3) } → 2 * 3 = 6 possibilités.*

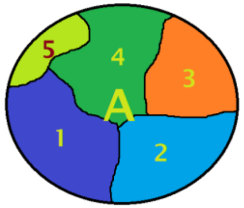
3. Les familles d'ensembles

Soit l'ensemble A = {1, 2, 3}. Cet ensemble est constitué de différents sous-ensembles ({1}, {1, 2} …), et tous ces sous-ensembles forment la famille des parties de A. Un ensemble contenant p éléments possède 2^p parties (= sous-ensembles).

Ex : Soit A = {a ; b}, ici, la famille des parties de A est P(A) : {Ø,{a},{b},{a,b}}, c'est-à-dire toutes les « combinaisons » que l'on peut réaliser avec l'ensemble A.

4. La partition

La partition est la division de l'ensemble A en sous-ensembles distincts dont la réunion forme A.



Ce beau schéma réalisé avec Paint représente une partition de l'ensemble A

DÉNOMBREMENTS

Les dénombrements permettent, en fonction des situations, de calculer le nombre de possibilités de tirages lors d'épreuves de probabilités. Il existe différentes formules à apprendre et à savoir appliquer en fonction du dénombrement à effectuer !

I. LA P-LIST AVEC REMISE

La p-list avec remise est utilisée lors des **tirages ordonnés avec remise**, c'est-à-dire que, par exemple, on tire une boule, on note le numéro, puis on la repose dans l'urne avant d'en tirer une nouvelle. Ainsi, l'ensemble dans lequel on tire est **toujours le même** !

La formule utilisée est $\text{Card}(E)^p$, avec Card(E) le nombre d'éléments de l'ensemble et p le nombre de tirages.

Ex : j'ai les 26 lettres de l'alphabet (Card(E) = 26) et je veux savoir combien de mots de 3 lettres je peux former …

→ *il y 26^3 mots possibles (« aaa », « aab », « boa », « zyx » …), l'ordre compte et « aba » est différent de « baa » !*

II. L'ARRANGEMENT DE *N* ÉLÉMENTS PRIS *P* A *P*

L'arrangement, lui, est utilisé pour les tirages **ordonnés sans remise** (= tirages successifs), dans ce cas, on lieu de reposer la boule dans l'urne, **on la garde avec nous** et on retire dans un ensemble qui est donc **légèrement différent** (il y a une boule en moins).

Voici la jolie formule : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$, avec *p* le nombre de tirages et *n* le nombre d'objets de l'ensemble (prononcé « arrangement de p éléments parmi n »).

→ **Explication du « *n!* » :** 3! , prononcé factoriel de 3, donne 3*2*1. Pour 4! Cela donnerait 4 * 3 * 2 *1. **Attention, le factoriel de 0 donne 1 !**

Ex : j'ai les 26 lettres de l'alphabet (n = 26), et je veux savoir combien de mots de 3 lettres (p = 3) je peux former …
(/!\ Ici, chaque lettre est utilisable UNE FOIS (tirage sans remise) /!\)

$$\rightarrow A_{26}^3 = \frac{26!}{(26-3)!} = 26 * 25 * 24 = 15\,600$$

III. L'ARRANGEMENT AVEC REPETITION

Celui-ci est similaire à la p-liste avec remise, il est donc utilisé lors des **tirages ordonnés avec remise.**

Ainsi, si on tire x fois parmi n éléments, la formule est … n^x . Au final, si on regarde les formules et les utilisations, la **p-liste** et **l'arrangement avec répétition** c'est pareil !

Ex : on tire dans un paquet de 52 cartes une carte, on la repose, on en tire une autre, il y a 52^2 possibilités de tirages !

IV. PERMUTATION D'UN ENSEMBLE FINI À N ELEMENTS

La permutation est utilisée pour les tirages **ordonnés sans remise.** Elle est donc semblable à **l'arrangement de *n* éléments pris *p* à *p*,** mais lorsque **p est égal à n** (le nombre d'objets tirés est **le même** que le nombre d'objets total).
En d'autres termes, c'est donc un tirage ordonné de **tous les éléments de l'ensemble.**

La formule, qui est assez compliquée à retenir, est la suivante : $n!$, avec n le nombre d'éléments de l'ensemble.

Ex : vous disposez de 5 cartes (O, R, A, N et G), vous vous demandez combien de mots de 5 lettres vous pouvez former …
→ *5! = 120*

V. LA PERMUTATION AVEC RÉPÉTITION

Ce dénombrement est utilisé pour lors des **permutations d'un ensemble**, lorsque plusieurs éléments de l'ensemble appartiennent à une même catégorie (k_1, k_2, k_3 … k_x) et qu'on ne considère **que la catégorie** pour l'ordre. Permutation signifie simplement que l'on « mélange » l'ensemble afin d'obtenir un ordre différent.
Pour calculer le nombre de combinaisons, on fait :

$$\frac{n!}{k1!\,k2!\,k3!\ \ldots kx!}$$

avec *n* le nombre d'éléments de l'ensemble et *k* les nombres d'éléments par catégorie.

Ex : une urne contient 5 boules rouges, 3 noires, 4 bleues et 2 vertes. Combien existe-il d'ordre de tirage en prenant en compte uniquement la couleur des boules ?

$$\longrightarrow \frac{14!}{5!*3!*4!*2!}$$

VI. LA COMBINAISON DE N ELEMENTS PRIS P A P

Enfin, la combinaison est utilisée lors des tirages **non ordonnés sans remise (= tirages simultanés),** c'est-à-dire que l'on va tirer par exemple trois boules **d'un coup** et regarder lesquelles on a eu. **L'ordre ne compte donc pas** et « bleue-bleue-rouge » est similaire à « rouge-bleue-bleue ». Et voilà la dernière formule des dénombrements (!!!) :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

avec *n* le nombre d'éléments de l'ensemble et *p* le nombre d'éléments tirés.

Ex : en tirant au hasard 4 cartes d'un coup dans un paquet de 54 cartes, je me demande combien de combinaisons sont possibles ?

$$\longrightarrow \frac{54!}{4!(54-4)!}$$

ÉLÉMENTS DE PROBABILITÉ

I. INTRODUCTION ET DÉFINITIONS

Il existe deux types de phénomènes :

- **les phénomènes déterministes** : l'issue est **prévisible** : on peut prévoir le résultat à l'avance comme par exemple avec les lois de physique
- **les phénomènes aléatoires** : l'issue n'est **pas prévisible**, le résultat est dû au hasard (cela peut être un lancer de dé par exemple).

Une **expérience aléatoire** (ou **épreuve**) est une expérience dont le résultat n'est pas prévisible, c'est donc un **phénomène aléatoire**.

En probabilités, on travaille dans un **ensemble fondamental** (noté **Ω**) qui représente **l'ensemble des résultats possibles**. Un **évènement**, quant à lui, est un **sous-ensemble** de l'ensemble fondamental.

Ex : l'ensemble fondamental peut être « Les résultats d'un lancer de dé », et un évènement de cet ensemble peut être « Obtenir un chiffre pair ».

Il existe plusieurs types d'événements

- **l'évènement élémentaire** : constitué uniquement **d'un seul** résultat de l'ensemble.
  Ex : « Obtenir un 3 » lors d'un lancé de dé
- **l'événement impossible** ou ensemble **vide** (ne contient aucun résultat possible)
  Ex : obtenir un 7 à un lancer de dé
- **l'événement certain** : l'ensemble contient **tous les résultats** possibles
  Ex : obtenir un chiffre entre 1 et 6 en lançant le dé

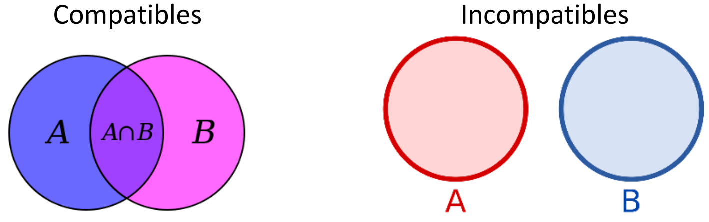
II. PROBABILITÉS

Une probabilité assoie à un évènement un nombre allant de **0 à 1**, elle permet de **mesurer la chance de réalisation de l'évènement** en question. Il y a quelques subtilités à connaître à propos des probabilités :

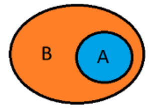
- $P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$
  avec Card(A) le « nombre de cas favorables » et Card(Ω) le « nombre de cas possibles ».
  Ex : dans un sac avec 15 boules, 7 sont bleus. La probabilité d'en tirer une bleu est de 7/15.

- **P(Ω) = 1**
- **P(ø) = 0**, ce qui signifie que l'évènement impossible ne peut pas se produire (logique).

- si **P(A ∩ B) = 0**, alors A et B **s'excluent mutuellement**, ils sont dits **incompatibles**. Cela signifie que les deux évènements ne **peuvent pas se produire en même temps**.
  Ex : on ne peut pas obtenir pile et face lorsqu'on lance une pièce).
  Dans ce cas-là, **P(A ∪ B) = P(A) + P(B)**.



- $P(\complement A) = 1 - P(A)$.
- **si A est inclus dans B**, alors **P(A) ≤ P(B).**



- **P(A ∪ B) = P(A) + P(B) – P(A∩B) (= théorème des probabilités totales)** → *formule important à connaître et à savoir utiliser !!!*

La propriété d'additivité forte ou formule de Poincaré ou d'inclusion-exclusion ou de crible (#SynonymesÀConnaître)

Cette propriété permet de connaître la **formule** lorsque l'on veut calculer **une union entre plusieurs évènements**. Elle est généralisable à n'importe quel nombre *n*. Pour *n* = 3, elle donne :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

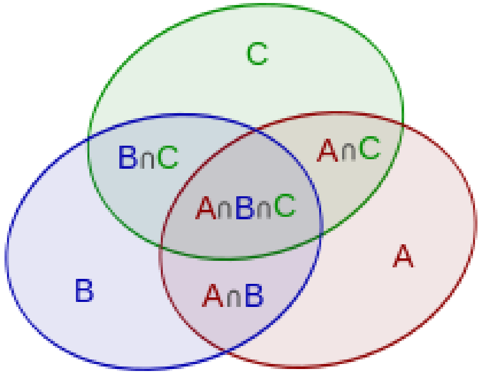


Schéma lorsque n = 3. Ceci est important à connaître et à comprendre !!

Il est facile de décortiquer cette formule : on veut savoir que vaut la probabilité des trois évènements ensemble. On additionne donc leurs différentes probabilités, puis on enlève les intersections. Cependant, en enlevant les trois intersections, on laisse un « trou » au milieu, d'où le rajout de l'intersection des 3 évènements en même temps (essayez de bien vous aider du schéma).

III. ÉQUIPROBABILITÉS

Lors d'une situation **d'équiprobabilité**, chaque **évènement élémentaire** a la même probabilité (pour imager, c'est comme au loto, chaque boule a autant de chance que les autres d'être tirée). Dans ce cas-là, la probabilité d'un évènement A est :

$$P(A) = \frac{1}{Card(\Omega)}$$

Ex : Dans une urne, il y a 15 boules. La probabilité de tirer une boule est de 1/15 pour toutes les boules.

IV. APPARTÉ FORMULE

Ça fait un peu cheveux sur la soupe la manière donc je le présente, mais c'est une formule importante à connaître !

Soit un lot de N produits. Parmi ces produits, il y a D produits qui sont défectueux. On décide de prélever un échantillon de n produits, et l'on se demande quelle est la probabilité A_k de trouver k produits défectueux dans cet échantillon.

Pour cela, il existe une formule que voici :

$$P(A_k) = \frac{C_D^k * C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

Ex : sur un lot de 150 bouteilles d'Ice Tea, 12 sont périmées. On prélève un échantillon de 25 bouteilles. Quelle est la probabilité de prélever 4 bouteilles périmées ?

$$\rightarrow \frac{C_{12}^4 * C_{150-12}^{25-4}}{C_{150}^{25}} \qquad \text{Rappel} : C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

V. PROBABILITÉS : ENSEMBLE FINI

Lorsque l'on travaille sur un ensemble fini, la probabilité de l'évènement est **comprise entre 0 et 1**. De plus, la **somme** des probabilités de tous les évènements est **toujours** égale à 1.

*Ex : considérons un **dé biaisé** :*
P(1) = 1/3, P(2) = 1/6, P(3) = 1/12, P(4) = 1/12, P(5) = 1/4. Trouver P(6) = ?
1/3 + 1/6 + 1/12 + 1/12 + 1/4 + ? = 1
? = 1 – 11/12 = 1/12