Variables aléatoires, Lois de probabilités continues

I. VARIABLES ALEATOIRES CONTINUES

1. Densité de probabilité

➢ **Variables aléatoires continues** :

Définition :

Une variable aléatoire continue à une probabilité nulle d'être égale à un nombre donné.

→On note : $P(a \leq X \leq b)$ ou $P(X \in [a,b])$

Exemple : *La probabilité qu'un PACES mesure 1,60000…0…. mètres est nulle mais la probabilité qu'un PACES mesure entre 1,59m et 1.61 est non nulle. La probabilité qu'un PACES mesure plus de 1,60m est non nulle aussi.*

Remarque : On ne peut donc pas lister l'ensemble des probabilités de toutes les éventualités d'une loi de probabilité d'une variable aléatoire car chacune est nulle.

➢ **Densité de probabilité** :

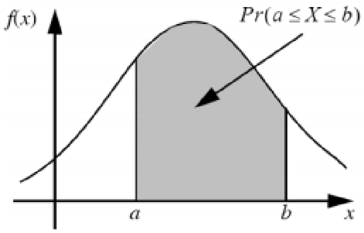
Définition :

Une densité de probabilité est une fonction utilisée pour définir la loi de probabilité de X (=distribution de X).

→On note : *f(x)*

Représentation :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$



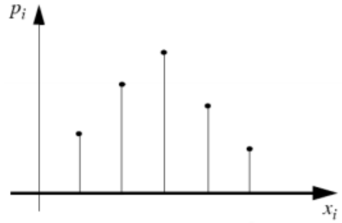
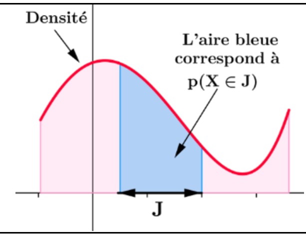
Rappels :

- $\int_a^b f(x)dx$ = intégrale de *f(x)* sur [a ; b] = aire sous la courbe de la fonction sur [a; b] (*zone grise*)
- F(x) est la primitive de f(x) ainsi $F(b) - F(a)$ ≈aire sous la courbe

La probabilité $P(a \leq X \leq b)$ est l'aire sous la courbe.

(ici la zone grise)

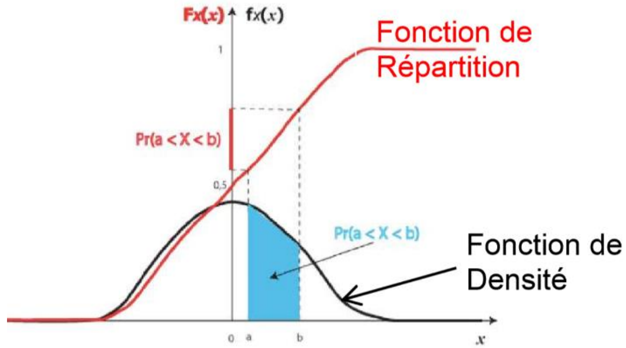
- **Du discret au continu :**

DISCRETE	CONTINUE
	
Sommes $\sum$	Intégrales $\int$
p_i	*f(x)dx*
$P(x_k \leq X \leq x_n) = \sum_{i=k}^{i=n} p_i$	$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$
Propriétés	
$p_i \geq 0$	$f(x) \geq 0$
$\sum_i xipi$	$\int_R f(x)dx = 1$
$\sum_i (x_i - \mu)^2 p_i$	$\sigma^2 = var(X) = \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 f(x)dx$
$\sum_i x^2 p_i - \mu^2$	$\sigma^2 = var(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx - \mu^2$

2. Fonction de répartition: F(x)

Propriétés :

- Fonction **monotone croissante** et **continue**
- Quand x est à -∞ il vaut 0 (*la courbe rouge est à 0 tout à gauche*)
- Quand x est à +∞ il vaut 1 (*la courbe rouge est à 1 tout à droite*)
- **F(x) = P(X≤ x)=**$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ (*F(x) est une primitive de la densité*)
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$= différence de hauteur sur l'axe des ordonnées de la fonction de répartition



II. LOIS DE PROBABILITES CONTINUES

1. Loi Exponentielle : E(λ)

➢ **Paramètres :**

λ : Taux de défaillance instantanée

➢ **Utilisation :**

Pour décrire un *processus de mortalité/défaillance* lors duquel *le risque instantané de mort/taux de défaillance* est **constant**.

Remarques :

- La durée de vie au-delà d'un instant t est indépendante de l'instant t.
- **P(X≤x)** = probabilité qu'un événement X survienne avant l'instant t=x

➢ **Formules :**

Fonction de densité :

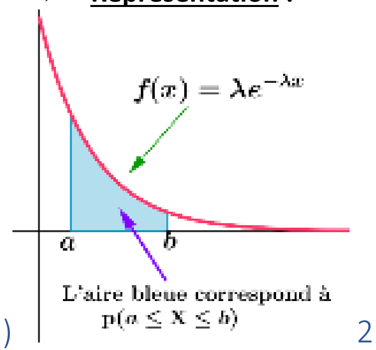
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ avec } \lambda>0 \text{ et } x\geq 0$$

Fonction de répartition :

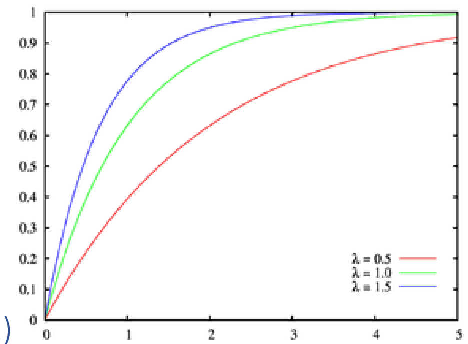
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \quad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

➢ **Représentation :**



1)



2)

1) Fonction de densité : L'intersection de *f(x)* avec l'axe des ordonnées est *f*(0)=λ.

2) Fonction de répartition : On voit bien que F(x) part de 0 pour atteindre 1.

➢ **Lien avec la Loi de Poisson :**

Si un événement suit une loi de Poisson de paramètre λ alors le temps qui s'écoule entre deux réalisations consécutives est $\frac{1}{\lambda}$ car distribué selon une loi exponentielle.

➢ ***Exemple :***

a) *La **durée de vie d'un aspirateur** peut être décrite ainsi et à chaque instant le taux de défaillance (la probabilité qu'il tombe en panne) est constant. C'est-à-dire que peu importe le temps écoulé ou le nombre d'aspirateur déjà cassés la probabilité que mon aspirateur tombe en panne reste la même pour un instant donné.*

b) *La **radioactivité** peut être décrite ainsi et à chaque instant le taux de radioactivité (la probabilité de désintégration) est constant. C'est-à-dire que peu importe le temps écoulé ou le nombre d'atome déjà désintégrés la probabilité que le noyau se désintègre reste la même pour un instant donné.*

2. Loi Uniforme : U([a ; b])

➢ **Paramètres**

[a ; b] ϵ R : l'intervalle appartient à l'ensemble des réels (R).

➢ **Utilisation**

La loi uniforme est en fait constante c'est-à-dire que peu importe x la probabilité est toujours la même.

Remarque :

- Sur l'intervalle [a ; b] la loi uniforme est constante mais en dehors de l'intervalle elle est nulle.

➢ **Formules :**

Fonction de densité :

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a\,;b] \text{ et } f(x)=0$$

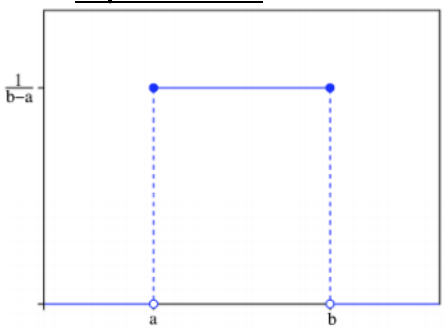
Fonction de répartition :

$$F(x) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq \mathrm{x}) = \int_a^x \frac{1}{(b-a)}\,dx = \frac{x-a}{(b-a)}$$

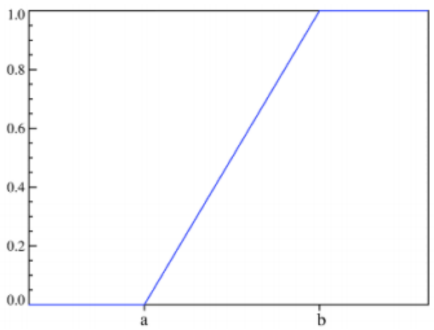
$$P(x \leq X \leq y) = \int_x^y \frac{1}{(b-a)}\,dx = \frac{y-x}{(b-a)}$$

$$\mu = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

➢ **Représentation :**



1)



2)

1) Fonction de densité : *f(x)* est donc constante sur [a ; b] et nulle en dehors.

2) Fonction de répartition : F(x) part de 0 pour atteindre 1 de manière linéaire.

➢ ***Exemple :***

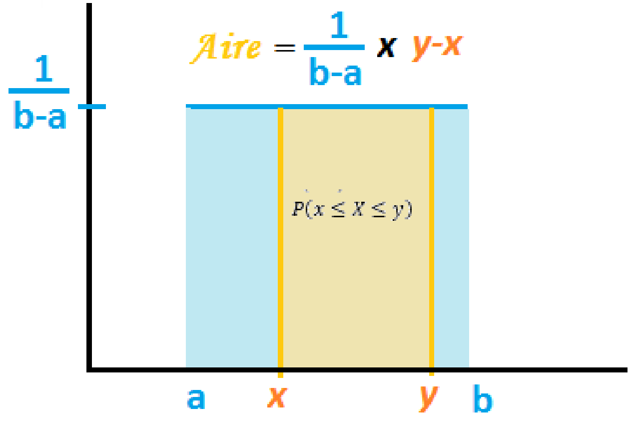
Le Professeur Staccini arrive toujours en avance pour ses cours. L'amphi ouvre le matin à 7 :30 et le cours doit commencer à 8 :00. On peut définir la probabilité de l'événement « arrivée du professeur Staccini » par une loi uniforme sur [7 :30 ; 8 :00]. Ainsi la probabilité que le professeur arrive au moins un quart d'heure en avance est $P(X \leq 7{,}75) = \int_{7,5}^{8} \frac{1}{(8-7{,}5)}\,dx = \int_{7,5}^{8} \frac{1}{0.5}\,dx = \frac{7.75-7.5}{(8-7.5)} = \frac{0.25}{0.5} = 0{,}5$. *Il y a donc 50% de chance que le Pr Staccini arrive au moins un quart d'heure en avance (soit avant 7 :45 ce qui dans un système décimal où 1h=60min=1 soit 30mn=0,5 soit 7 :45h=7.75).*

Explications pour votre compréhension

- La probabilité est donnée par l'aire sous la courbe de densité qui ici est un rectangle. La totalité de l'aire doit donner 1. Sa largeur est [a ; b]=b-a. Soit A son aire :

A= x x (b-a) = 1 ⇔ $x = \frac{1}{(b-a)}$. Sa hauteur est donc $\frac{1}{(b-a)}$

- $P(x \leq X \leq y) = \frac{y-x}{(b-a)}$



3. Loi Normale : N(μ ;σ)

➢ **Paramètres :**

μ : La moyenne de X
σ : L'écart-type de X
X : Variable aléatoire

➢ **Utilisation :**

La loi Normale sert TOUT le temps (c'est la vie les gars !). Elle décrit la répartition naturelle de phénomènes, biologiques par exemples.

➢ **Formules :**

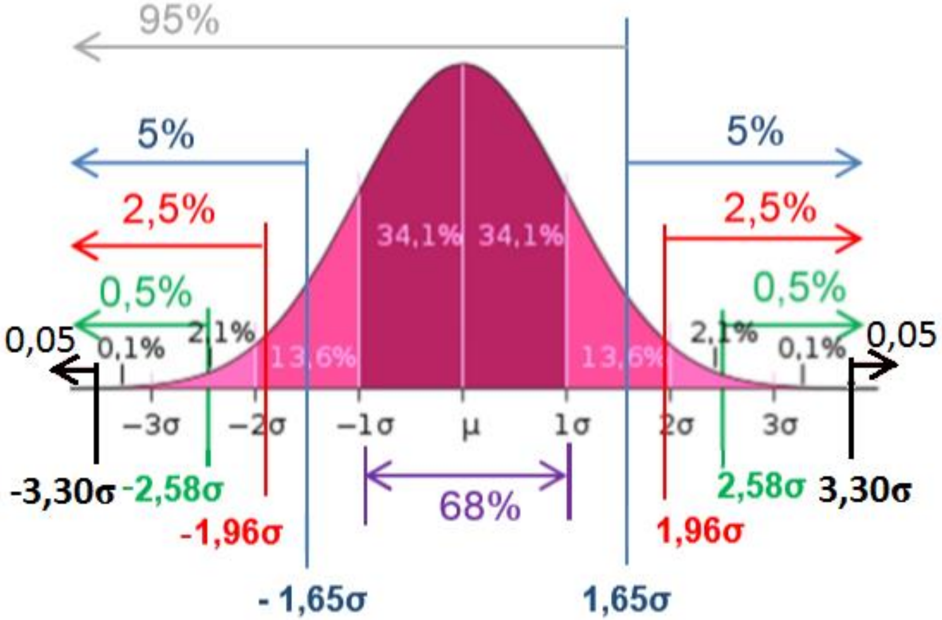
Fonction de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \; si\; x \in [-\infty\,; +\infty]$$

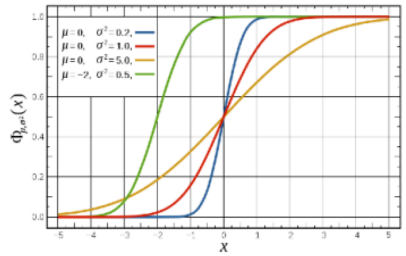
Fonction de répartition :

P(X < μ - 1,65 σ ou X > μ + 1,65 σ) = 10%
P(X < μ - 1,96 σ ou X > μ + 1,96 σ) = 5%
P(X < μ - 2,58 σ ou X > μ + 2,58 σ) = 1%
P(X < μ - 3,30 σ ou X > μ + 3,30 σ) = 0,1%
P (μ - 1σ < X < μ + 1σ) = 68%

➢ **Représentation :**



Fonction de densité : C'est une courbe en cloche appelée **courbe de Gauss**. On a représenté ici les différents découpage en intervalle des valeurs limites a connaitre. *(On lit : il y a 10 chances sur 100 pour que X<μ-1,65σ ou X>μ-1,65, soit 5% du côté gauche et 5% du côté droit).*



Fonction de répartition : Ici toutes les courbes [sauf la verte] ont la même moyenne (notée X sur le graph). Ainsi le point d'intersection de toutes ces courbes a pour coordonnées (0 ; 0,5). Donc 50% est atteint au niveau de X.

➢ ***Exemple :***

Le poids des PACES se répartit selon une loi Normale N(μ ;σ) avec μ=60Kg et σ=10Kg. Ainsi 95% des PACES pèsent entre μ-1,96 σ= 60- 1,96x10 = 60-19.6=**40,4** et μ+1,96 σ= 60+ 1,96x10 = 60+19.6=**79,6**.

4. Loi Normale centrée réduite : N(μ ;σ)= N(0 ;1)

- **Paramètres**

μ=0 : La moyenne de X, *elle est donc centrée sur 0*
σ=1 : L'écart-type de X, *elle est donc réduite*
Z : Variable aléatoire

- **Passage de la loi Normale à la loi Normale centré réduite :** changement de variable

On a la variable aléatoire X qui suit une loi Normale N(μ ; σ). Soit Z une variable aléatoire qui suit une loi Normale centrée réduite N(0 ; 1).

Ainsi $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$

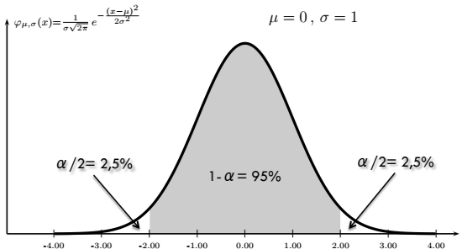
Remarque : on peut donc ramener tous les problèmes suivant une loi Normale à une distribution Normale centrée réduite !

Exemple :

- **Utilisation**

La loi Normale centrée réduite est juste un cas particulier de la loi Normale. Lorsque l'on a une variable aléatoire qui suit une loi Normale dont le comportement nous est inconnu on la ramène à une loi Normale centrée réduite dont le comportement est connu, on pourra donc utiliser la table de la loi Normale centrée réduite.

- **Représentation :**



Fonction de densité : On a 95% de chance d'avoir un individu
$\in [\,\mu - 1{,}96\,\sigma\,;\mu - 1{,}96\,\sigma]$
$= [-1.96\,;\ +1{,}96]$
C'est-à-dire dans la zone grisée

- **Table de la loi Normale centrée réduite :**

L

- ***Exemple :***

Le poids des PACES se répartit selon une loi Normale N(μ ;σ) avec μ=60Kg et σ=10Kg.

Explications de la table de la loi normale centrée réduite

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382

Sur la première ligne on lit la seconde décimale

La table de la loi normale centrée réduite donne les probabilités de pour $0 \le X \le 3.99$

On lit le chiffre des unités et la première décimale dans la colonne de gauche

Pour P(Z<1,24) on lit 1,2 dans la première colonne puis 0,04 sur la première ligne. On cherche l'intersection de la ligne et de la colonne. On trouve 0,8925.

III. APPROXIMATIONS

Certaines lois peuvent être approximées par d'autres.

Loi Binomiale → Loi de Poisson		
Si n> 50 ; p≤0,10 et np≤ 5	**Alors** B(n ; p) → P(λ=np)	La loi Binomiale a ainsi été approximée par la loi de Poisson
Loi Binomiale → Loi Normale		
Si $np \geq 5$ et nq≥ 5	**Alors** B(n ; p) → N(np;$\sqrt{npq}$)	La loi Binomiale a ainsi été approximée par la loi Normale
Loi de Poisson → Loi Normale		
Si $\lambda > 25$	**Alors** P(λ) → N(λ;$\sqrt{\lambda}$)	La loi de Poisson a ainsi été approximée par la loi Normale