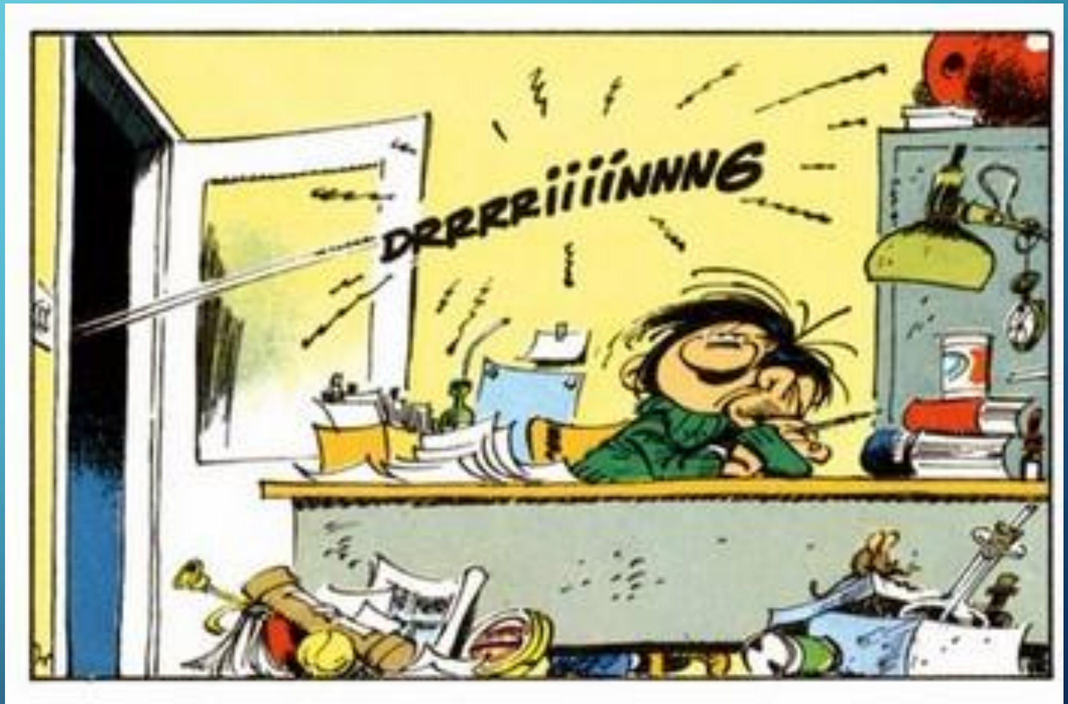
TUT' RENTRÉE BIOSTATS'

COURS N°4 : LOI DE PROBABILITÉS CONTINUES

SOMMAIRE



IV) VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES

C'est plus rapide et vous allez kiffer allleyyy

VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES

Définition :

Une variable aléatoire continue à une probabilité nulle d'être égale à un nombre donné.

→On note : **$P(a \leq X \leq b)$** ou **$P(X \in [a,b])$**

Remarque : On ne peut donc pas lister l'ensemble des probabilités de toutes les éventualités d'une loi de probabilité d'une variable aléatoire car chacune est nulle.

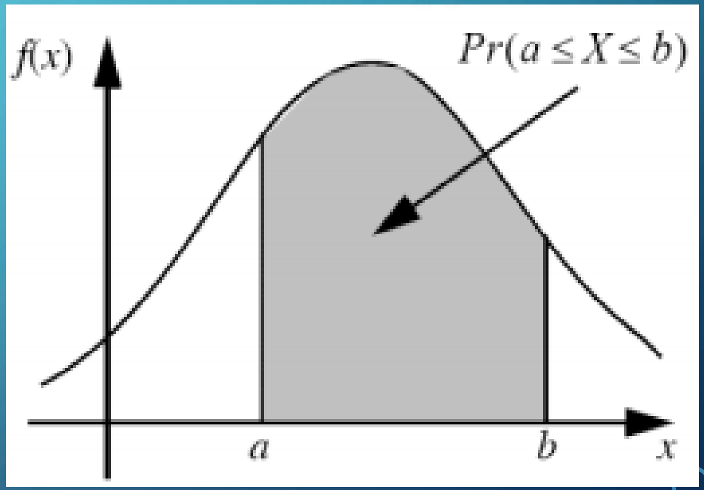
VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES

Exemple :

La probabilité qu'un PACES mesure 1,60000…0…. mètres est nulle.

La probabilité qu'un PACES mesure entre 1,59m et 1.61 est non nulle.

La probabilité qu'un PACES mesure plus de 1,60m est non nulle aussi.



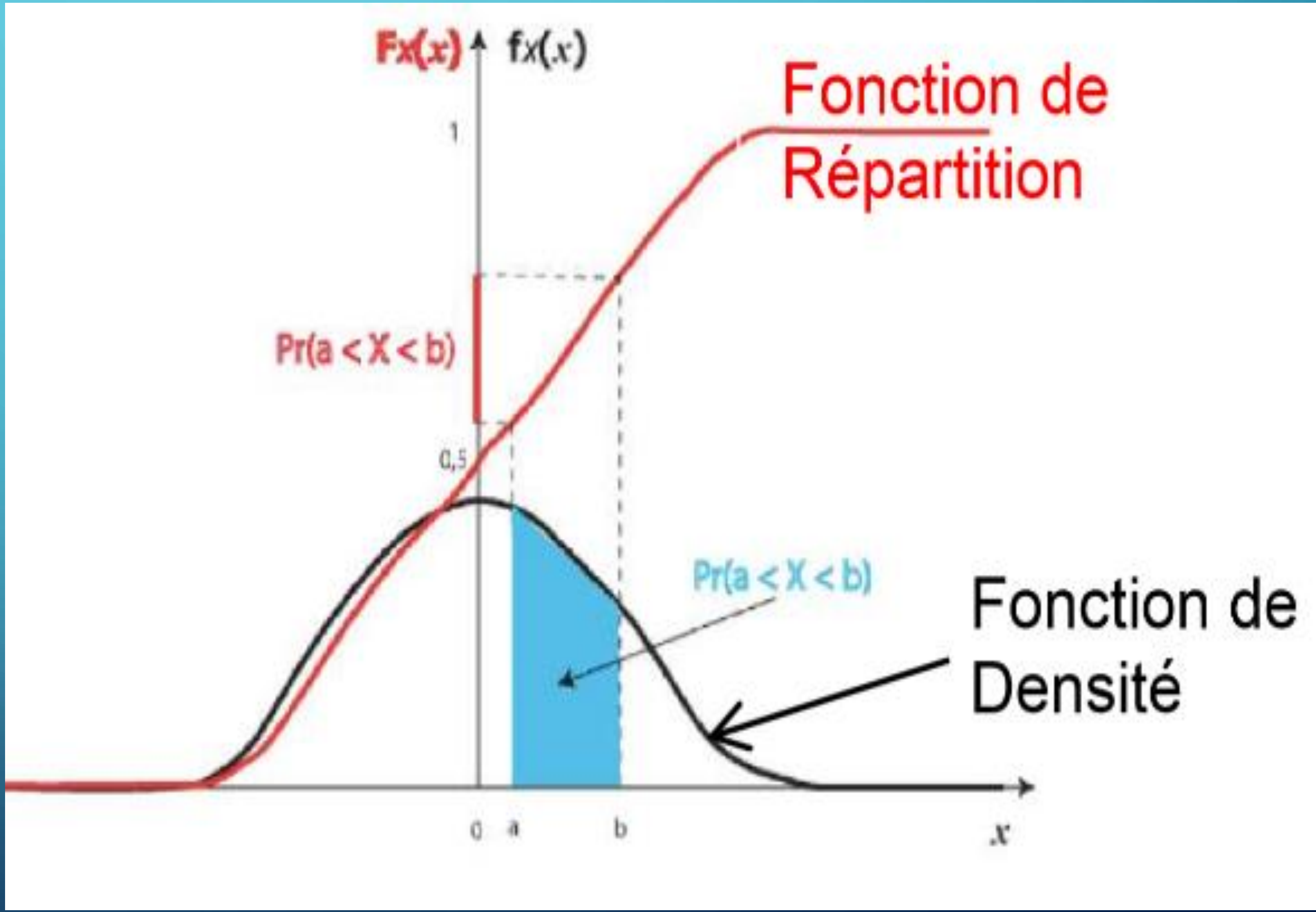
DENSITÉ DE PROBABILITÉ

Définition :

Une densité de probabilité est une fonction utilisée pour définir la loi de probabilité de X

(=distribution de X).

→On note : ***f(x)***



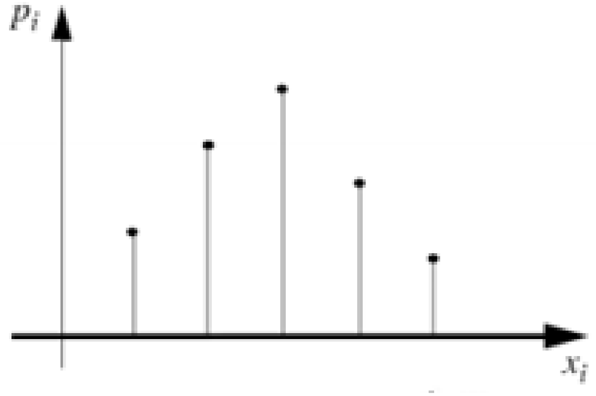
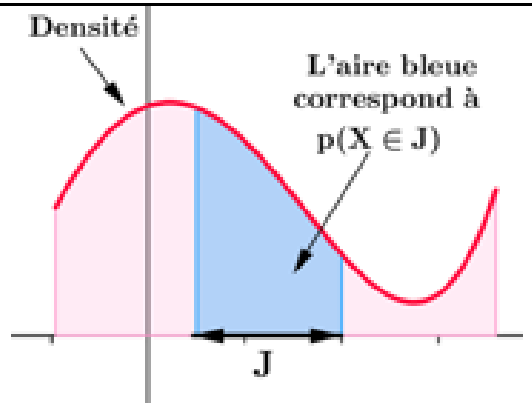
DENSITÉ DE PROBABILITÉ

Rappels :

- $\int_a^b f(x)dx$ = **intégrale** de *f*(*x*) sur [a ; b] = aire sous la courbe de la fonction sur [a; b] (*zone grise*)
- F(x) est la primitive de f(x) ainsi $F(b) - F(a)$ ≈aire sous la courbe

ppels :
$\int_a^b f(x)dx$ = intégrale de *f(x)* su
a ; b] = aire sous la courbe de
a fonction sur [a; b] (*zone gris*
(x) est la primitive de f(x) ains
$(b) - F(a)$ ≈aire sous la courb

La probabilité P(a≤X≤b) est l'aire sous la courbe.

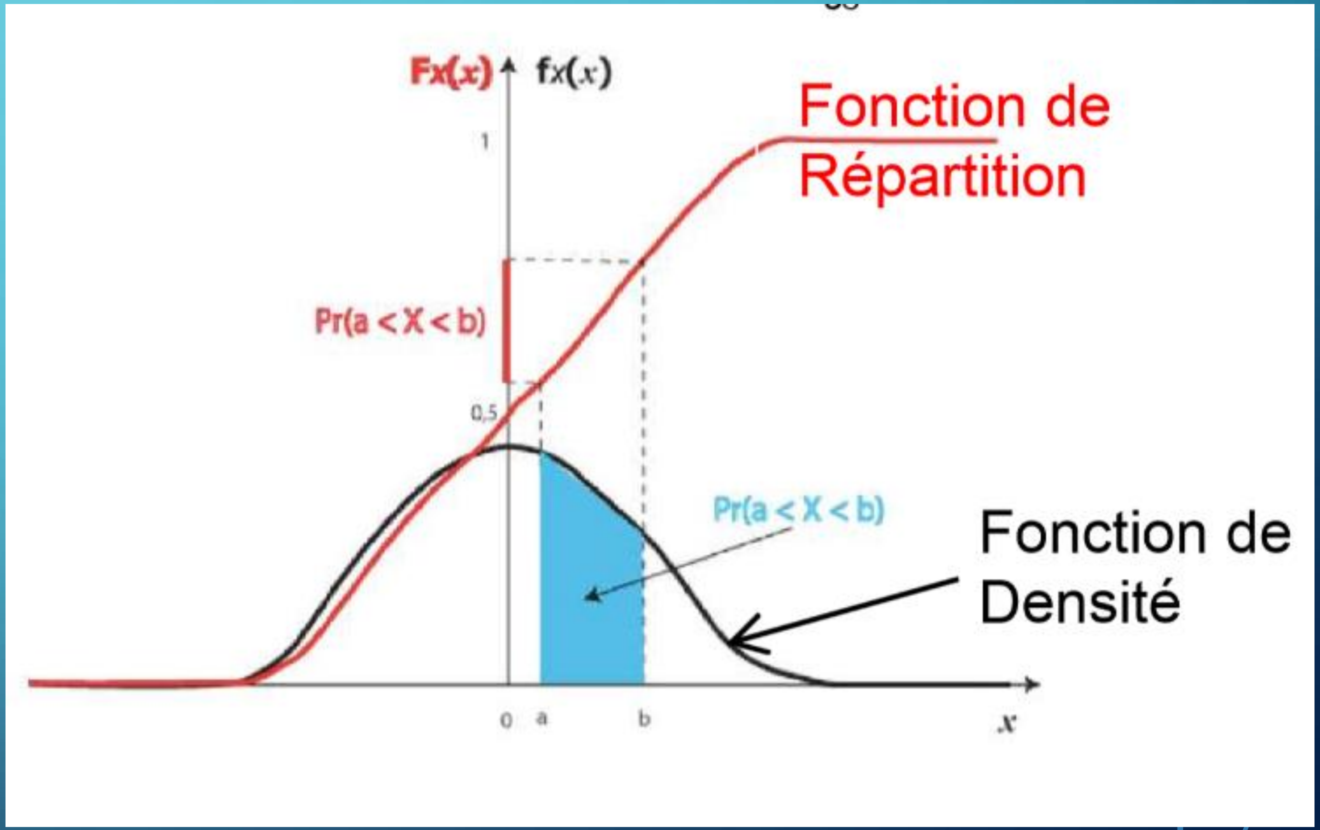
<table>
<tr><th>DISCRETE</th><th>CONTINUE</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Sommes $\sum$</td><td>Intégrales $\int$</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>$f(x)dx$</td></tr>
<tr><td>$P(x_k \leq X \leq x_n) = \sum_{i=k}^{i=n} p_i$</td><td>$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Propriétés</td></tr>
<tr><td>$p_i \geq 0$</td><td>$f(x) \geq 0$</td></tr>
<tr><td>$\sum_i xipi$</td><td>$\int_R f(x)dx = 1$</td></tr>
<tr><td>$\sum_i (x_i - \mu)^2 p_i$</td><td>$\sigma^2 = var(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 f(x)dx$</td></tr>
<tr><td>$\sum_i x^2 p_i - \mu^2$</td><td>$\sigma^2 = var(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx - \mu^2$</td></tr>
</table>

FONCTION DE RÉPARTITION: F(X)

- Fonction **monotone croissante** et **continue**
- **F(x) = P(X**$\leq$ x**)**$=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
- $\mathrm{P}(\mathrm{a} \leq \mathrm{X} \leq \mathrm{b}) =$

$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$

= différence de hauteur sur l'axe des ordonnées de la fonction de répartition



Allez sur SOCRATIVE avec vos portables

LOGIN-Student-Room name : **PACESTTR**- cliquez sur Join

QRU TIME

socrative by MasteryConnect

A propos des lois de probabilité et des variables aléatoires. **Donnez la vraie.**

A) On note $g(x)$ la fonction de répartition

B) On note F(x) la fonction de densité

C) Pour une loi de proba discrète on peut calculer une proba à partir de l'aire sous la courbe de la fonction de densité.

D) Pour une loi de proba continue on peut calculer une proba à partir de l'aire sous la courbe de la fonction de répartition.

E) C'est clairement une arnaque, tout est faux !

CORRECTION

A) On note $g(x)$ la fonction de répartition FAUX Fonction de répartion c'est F(x)

B) On note F(x) la fonction de densité FAUX Fonction de densité c'est $f(x)$

C) Pour une loi de proba ~~discrète~~ on peut calculer une proba à partir de l'aire sous la courbe de la fonction de densité. FAUX CONTINUE

D) Pour une loi de proba continue on peut calculer une proba à partir de l'aire sous la courbe de la fonction de ~~répartition~~. FAUX De densité

E) C'est clairement une arnaque, tout est faux !

V) LOIS DE PROBABILITES CONTINUES

Youpi!

LOI EXPONENTIELLE : E(λ)

- **<u>Paramètres</u>** : λ : Taux de défaillance instantanée
- **<u>Utilisation</u>** : Pour décrire un *processus de mortalité/défaillance* lors duquel *le risque instantané de mort/taux de défaillance* est **constant.**
- ***<u>Exemple</u>*** : *La **radioactivité***
- **<u>Lien avec la Loi de Poisson</u>** : <u>Si</u> un événement suit une loi de Poisson de paramètre λ <u>alors</u> le temps qui s'écoule entre deux réalisations consécutives est $\frac{1}{\lambda}$ car distribué selon une loi exponentielle.

FORMULES

Fonction de densité :

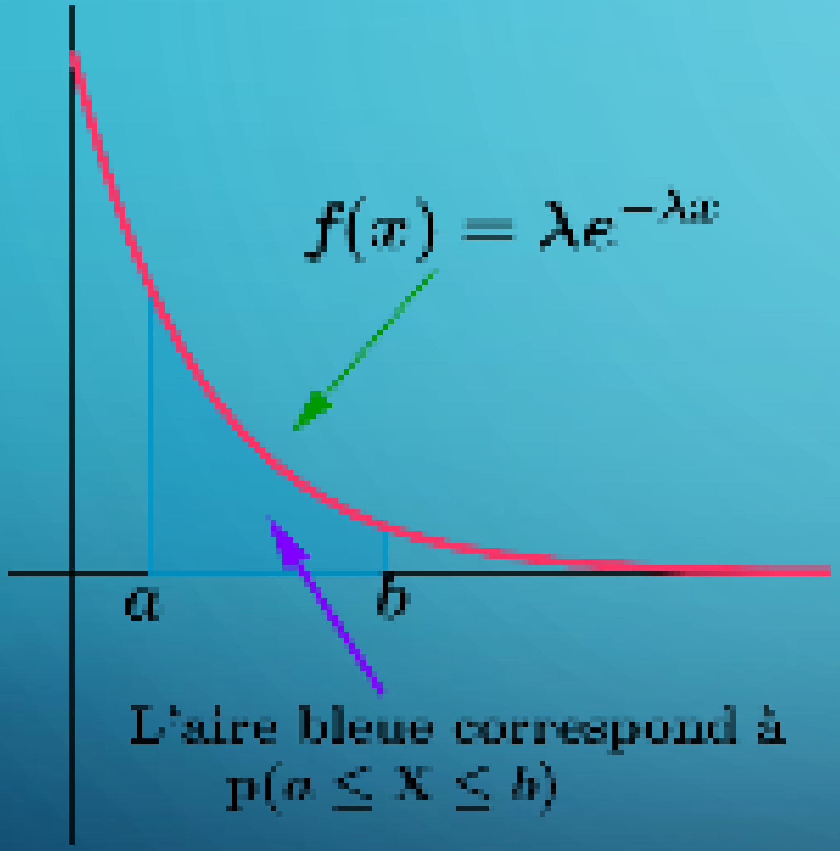
$$\mathbf{f}(x) = \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}}$$ **avec λ>0 et x ≥0**

Fonction de répartition :

$$\mathbf{F}(x) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq \mathrm{x}) = \int_0^x e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}} \quad \boldsymbol{\sigma^2} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda^2}}$$

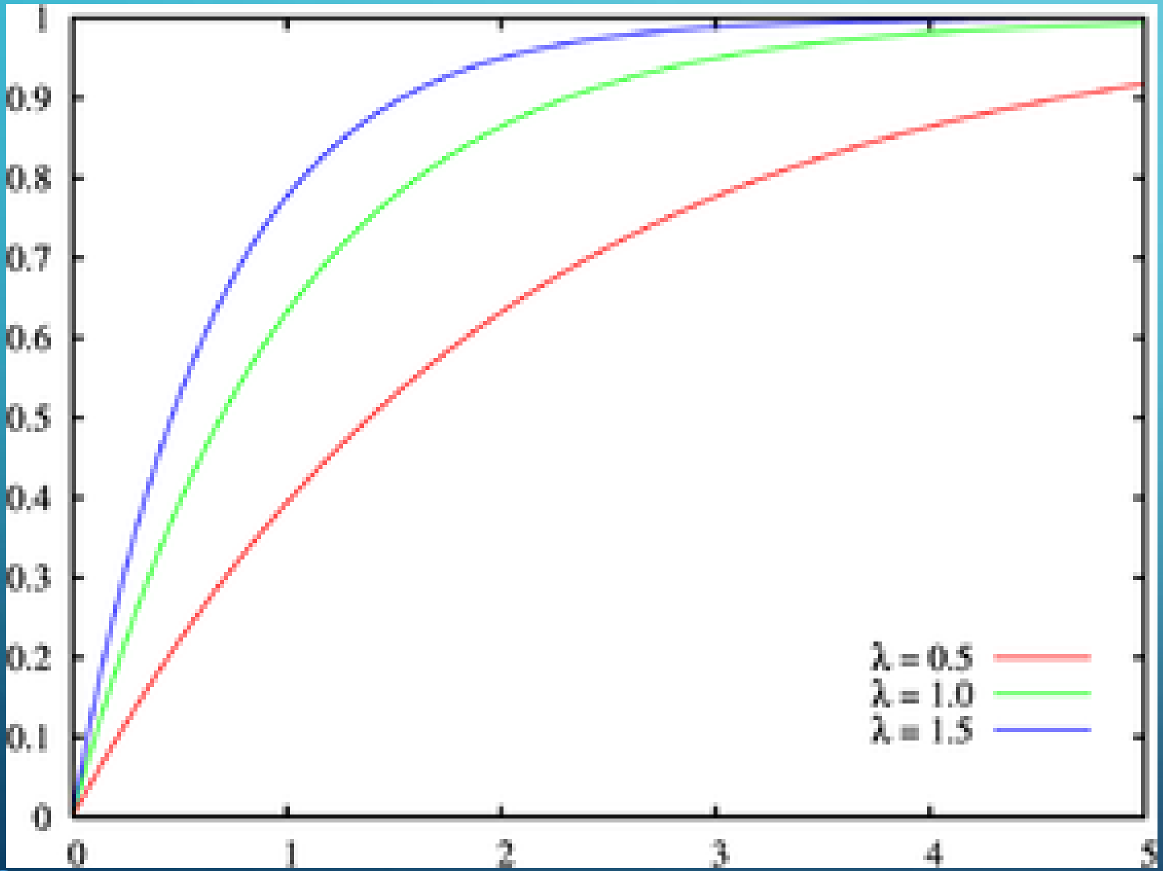
REPRÉSENTATION



- <u>Fonction de densité</u> :

L'intersection de $f(x)$ avec l'axe des ordonnées est $f(0)=\lambda$.

REPRÉSENTATION

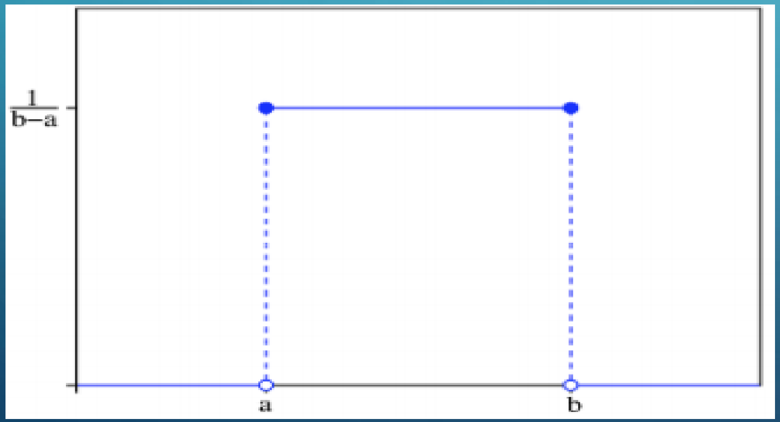


<u>Fonction de répartition</u> : On voit bien que F(x) part de 0 pour atteindre 1.

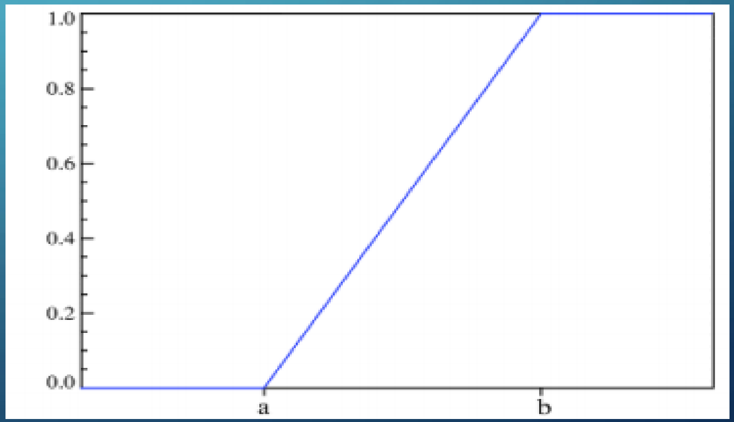
LOI UNIFORME : U([A ; B])

- **Paramètres [a ; b]** ϵ R : l'intervalle appartient à l'ensemble des réels (R).
- **Utilisation** : La loi uniforme est en fait constante c'est-à-dire que peu importe x la probabilité est toujours la même.

Fonction de densité



Fonction de Répartition



FORMULES

Fonction de densité :

$$\mathbf{f}(x) = \frac{1}{b-a}\ \textbf{si x} \in [a\,;b]\ \textbf{et f(x)=0}$$

Fonction de répartition :

$$\mathbf{F}(x) = \mathrm{P(X \leq x)} = \int_a^x \frac{1}{(b-a)}\,dx = \frac{x-a}{(b-a)}$$

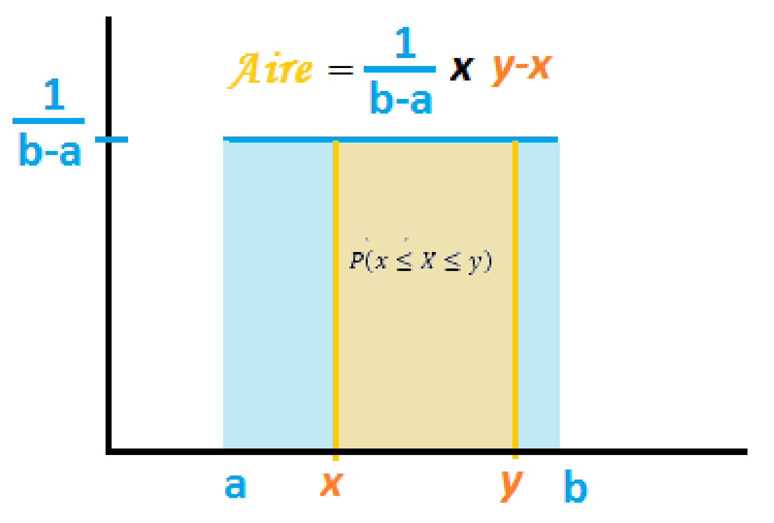
$$P(x \leq X \leq y) = \int_x^y \frac{1}{(b-a)}\,dx = \frac{y-x}{(b-a)}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\boldsymbol{a+b}}{\mathbf{2}} \qquad \boldsymbol{\sigma^2} = \frac{(\boldsymbol{b-a})^2}{\mathbf{12}}$$

EXPLICATIONS

- La probabilité est donnée par l'aire sous la courbe de densité qui ici est un rectangle. La totalité de l'aire doit donner 1. Sa largeur est [a ; b]=b-a. Soit A son aire :

A= x x (b-a) = 1 $\Leftrightarrow$ x = $\frac{1}{(b-a)}$. Sa hauteur est donc $\frac{1}{(b-a)}$



EXEMPLE

- *Eva doit se rendre à Pasteur. Elle ne regarde pas les horaires de bus et attend gentiment à l'arrêt de Valrose. Un bus part toutes les ½ heure de la gare routière. Eva attend de 11:00 à 11:30. Quelle est la probabilité que le bus arrive avant 11:15 pour que Eva soit à l'heure pour le déjeuner?*

Qui a une idée?

RÉPONSE

$P(X \leq 11{,}25) = \int_{11}^{11{,}5} \frac{1}{(11{,}5-11)} dx = \int_{7{,}5}^{8} \frac{1}{0.5} dx = \frac{11{,}25-11}{(11{,}5-11)} = \frac{0.25}{0.5} = 0{,}5$. *Il y a donc 50% de chance que Eva prenne le bus avant 11:15 et donc 50% de chance pour qu'elle arrive en retard pour manger son bagel.*

LOI NORMALE : N(μ ;σ)

Paramètres

- μ : La moyenne de X
- σ : L'écart-type de X
- **X** : Variable aléatoire

Utilisation :La loi Normale sert TOUT le temps (c'est la vie les gars !). Elle décrit la répartition naturelle de phénomènes, biologiques par exemples.

REPRÉSENTATION ET FORMULES

Fonction de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \; si\; x \in [-\infty\,;+\infty]$$

Fonction de répartition :

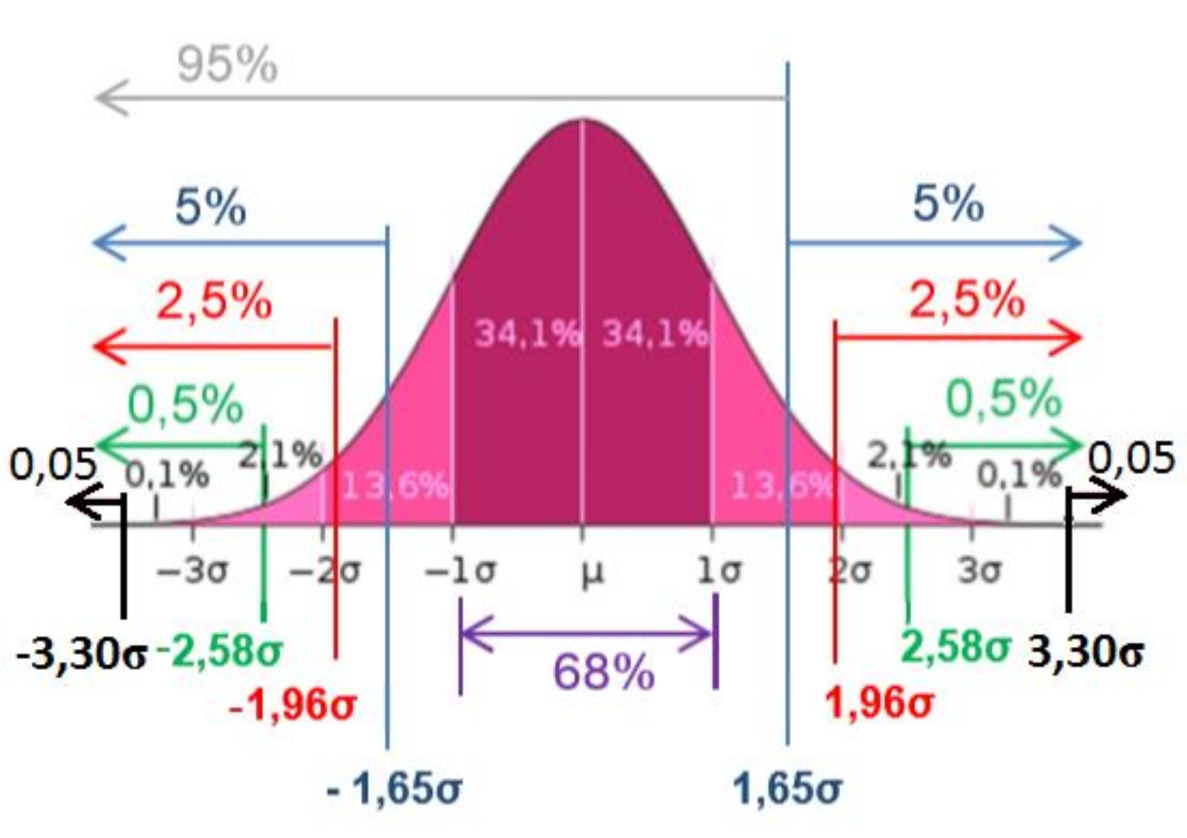
P(X < μ - 1,65 σ ou X > μ + 1,65 σ) = 10%

P(X < μ - 1,96 σ ou X > μ + 1,96 σ) = 5%

P(X < μ - 2,58 σ ou X > μ + 2,58 σ) = 1%

P(X < μ - 3,30 σ ou X > μ + 3,30 σ) = 0,1%

P (μ - 1σ < X < μ + 1σ) = 68%

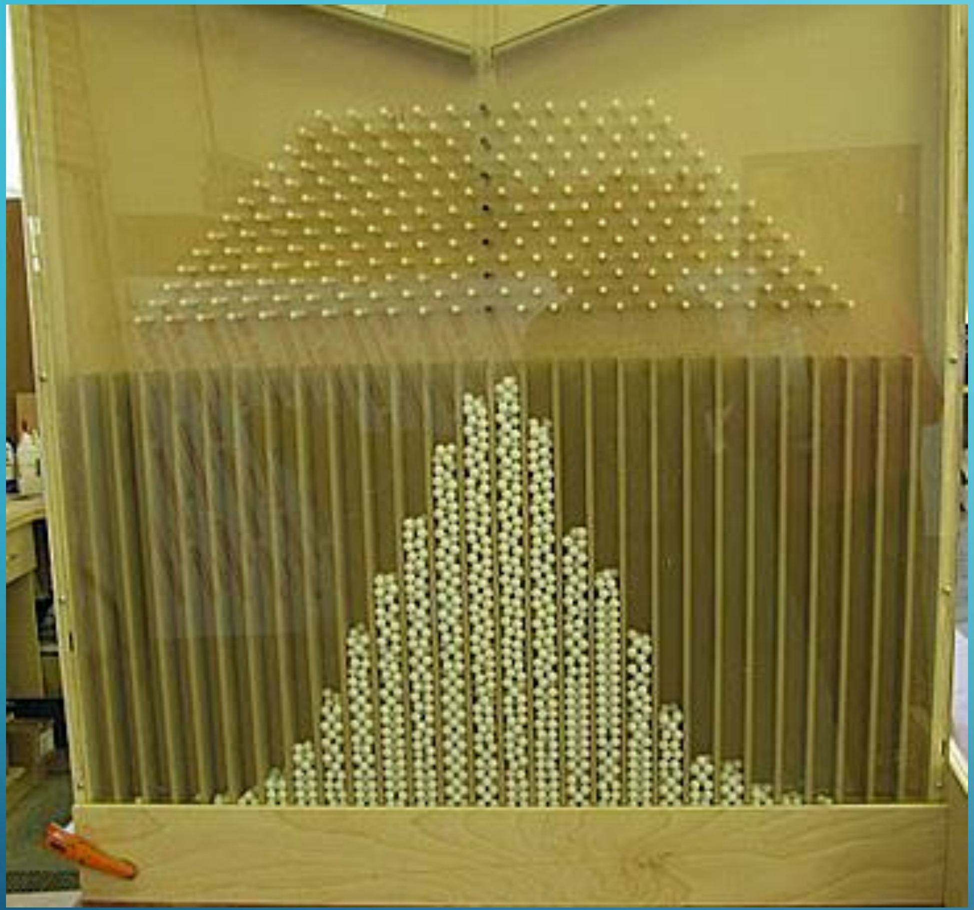


COURBE DE GAUSS

<u>Fonction de densité</u> : C'est une courbe en cloche appelée **courbe de Gauss.**

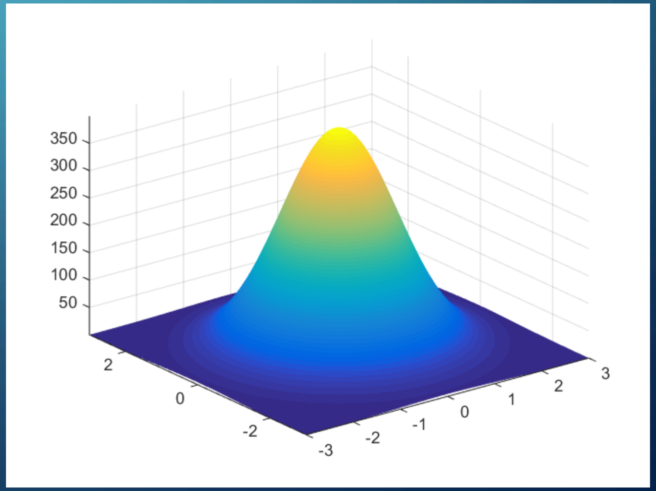
C'est un modèle de distribution naturel courant

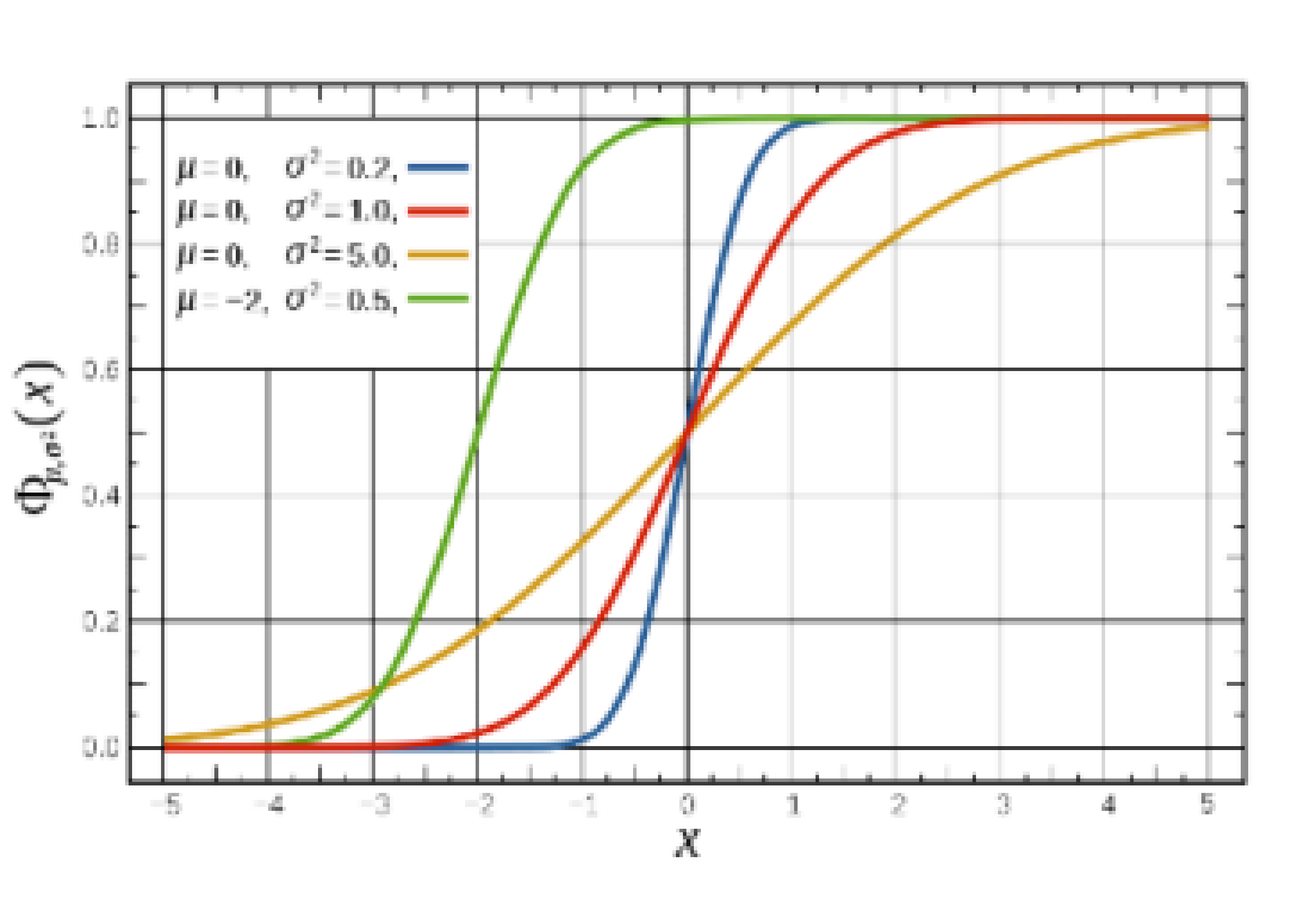
Planche de Galton



Tas de sable

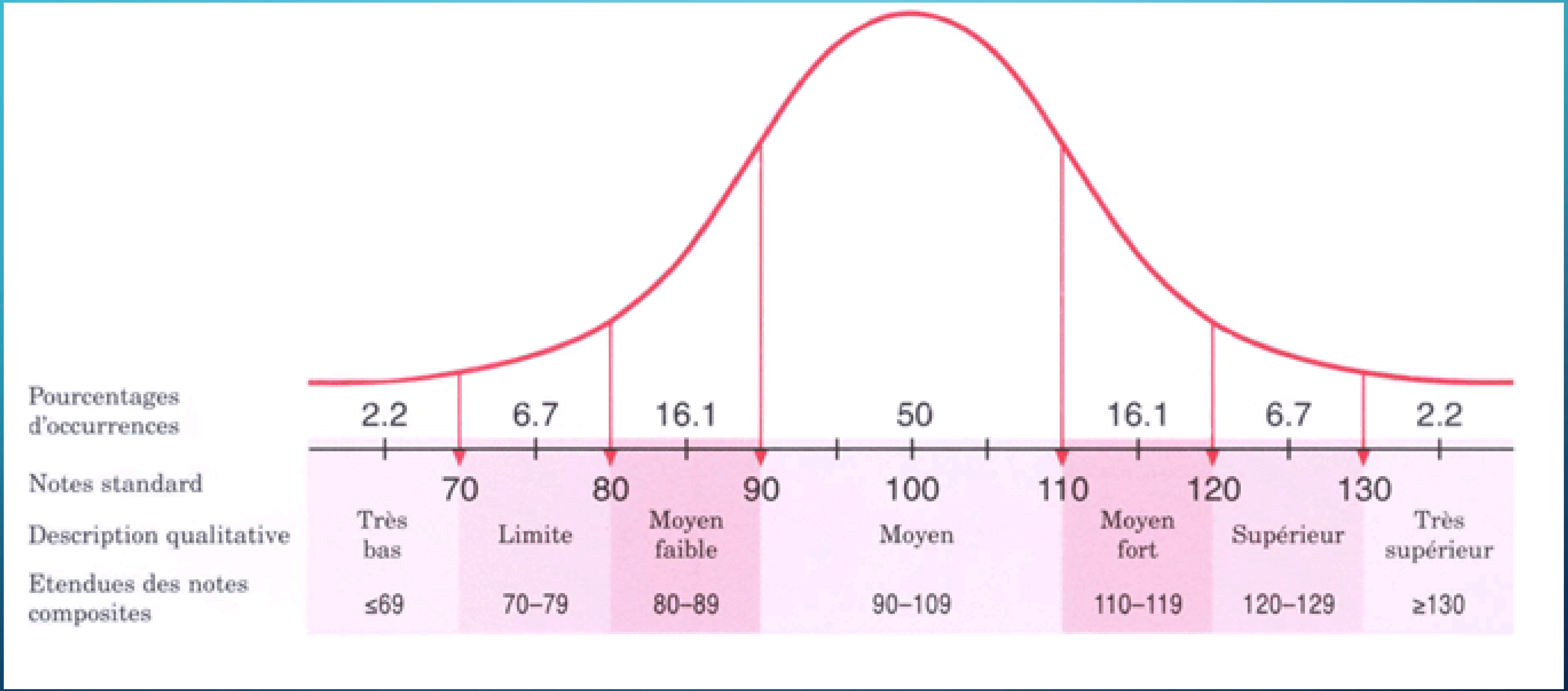
Gauss en 3D





- <u>Fonction de répartition</u> : Ici toutes les courbes [sauf la verte] ont la même moyenne (notée X sur le graph). Ainsi le point d'intersection de toutes ces courbes a pour coordonnées (0 ; 0,5). Donc 50% est atteint au niveau de X.

EXEMPLE : POID; TAILLE…



LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE : $N(\mu\ ;\sigma) = N(0\ ;1)$

Paramètres

- **$\mu=0$** : La moyenne de X, *elle est donc centrée sur 0*
- **$\sigma=1$** : L'écart-type de X, *elle est donc réduite*
- **Z** : Variable aléatoire

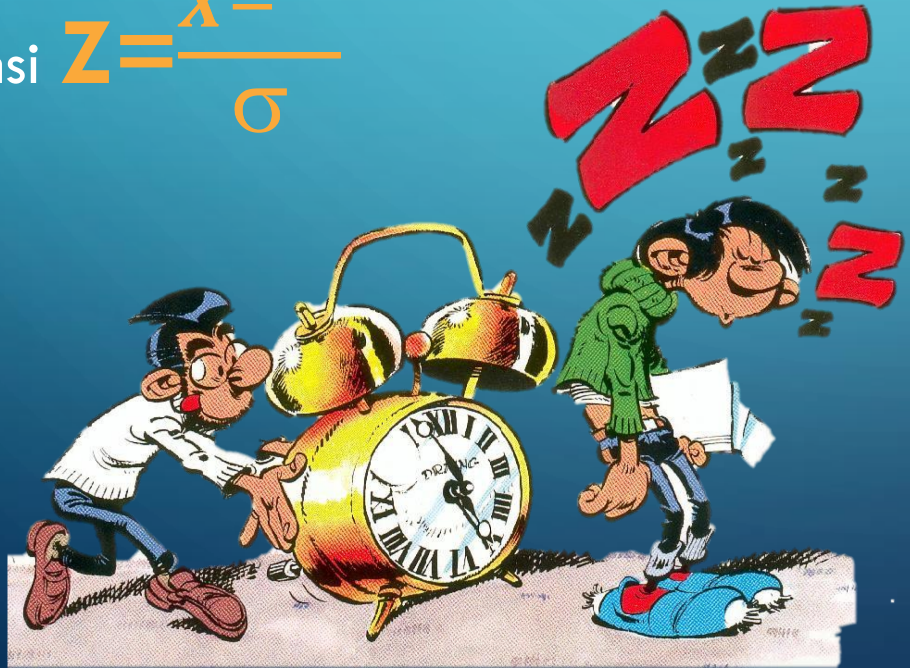
Utilisation

- La loi Normale centrée réduite est juste un **cas particulier** de la loi Normale. Lorsque l'on a une variable aléatoire qui suit une loi Normale dont le comportement nous est inconnu on la ramène à une loi Normale centrée réduite dont le comportement est connu, on pourra donc utiliser la table de la loi Normale centrée réduite.

<u>PASSAGE DE LA LOI NORMALE À LA LOI NORMALE CENTRÉ RÉDUITE</u> : CHANGEMENT DE VARIABLE

- On a la variable aléatoire X qui suit une loi Normale N(μ ; σ). Soit Z une variable aléatoire qui suit une loi Normale centrée réduite N(0 ; 1).

- Ainsi $Z=\frac{X-}{\sigma}$



Allez sur SOCRATIVE avec vos portables

LOGIN-Student-Room name : **PACESTTR**- cliquez sur Join

QRU

La variable aléatoire X [poid des Paces de l'amphi] suit une loi Normale. En moyenne un PACES pèse 60Kg (en Septembre ☺), de plus $\sigma=10$ **Quelle(s) proposition(s) est (sont) exacte(s) ?**

A) La variable X suit la loi Normale N(30 ; 10)

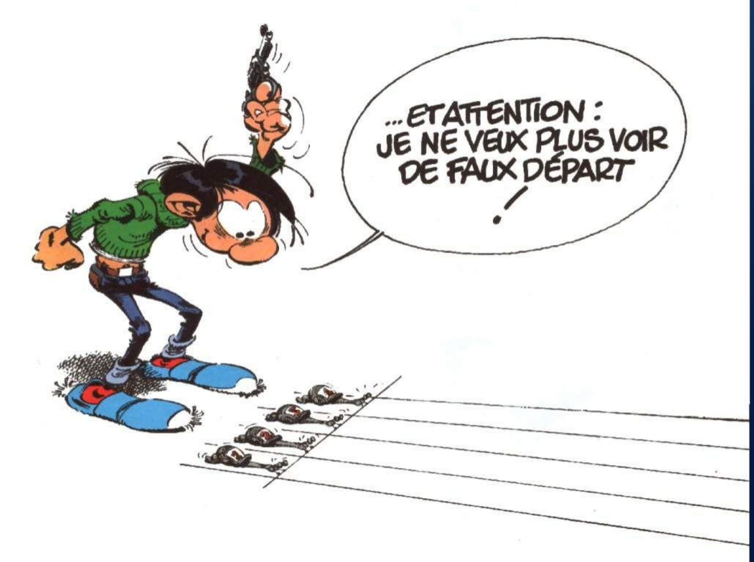
B) La variable X suit la loi Normale N(10 ; 60).

C) On transforme la variable X en la variable Z qui est centrée réduite car on ne connait pas le comportement de la centrée réduite

D) La variable X suit la loi B(60 ; 10)

E) Tout est faux, ce sont des mensonges dû à un complot du GIEC,

des illuminatis, de l'industrie du sucre et de Michael Jackson.



ON CORRIGE

A) La variable X suit la loi Normale N(30 ; 10) FAUX N(60; 10)

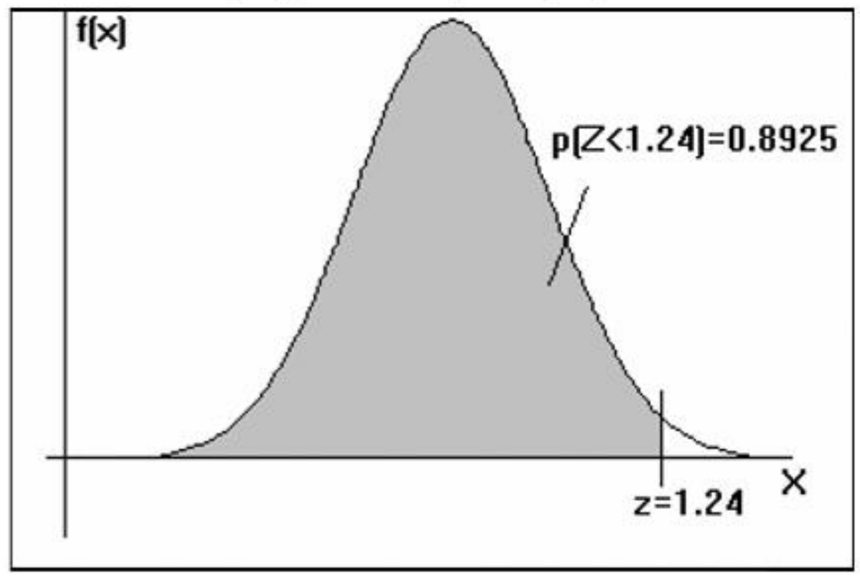
B) La variable X suit la loi Normale N(10 ; 60). FAUX N(60; 10)

C) On transforme la variable X en la variable Z qui est centrée réduite car on ne connait pas le comportement de la centrée réduite FAUX Justement on connait le comportement de la centrée réduite

D) La variable X suit la loi B(60 ; 10) FAUX N(60; 10)

E) Tout est faux VRAI

TABLE DE LA LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE



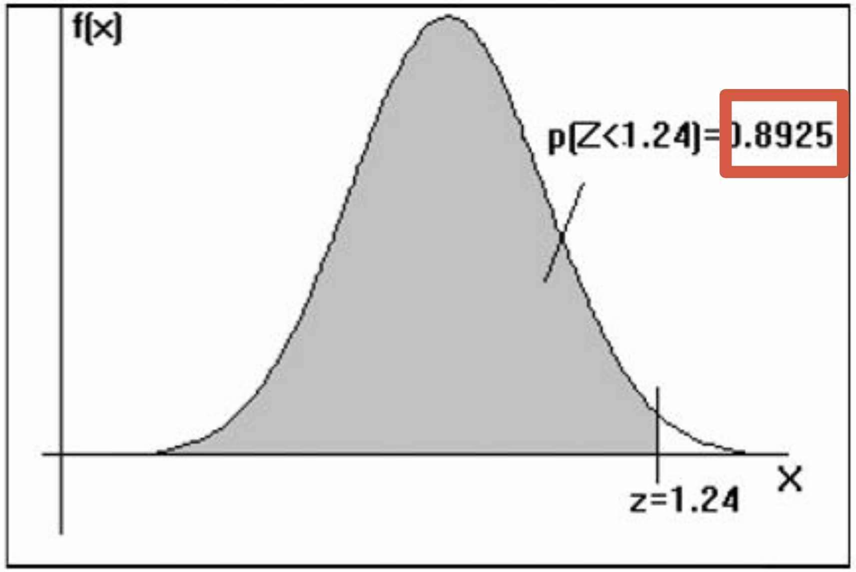
Exemple: Sachant $P(Z < 1{,}24) = 0{,}8925$, on en déduit:

1/ $(P(Z > 1{,}24) = 1 - P(Z < 1{,}24) = 1 - 0{,}8925 = 0{,}1075$

2/ $P(Z < -1{,}24) = P(Z > 1{,}24) = 0{,}1075$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251

TABLE DE LA LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE



Rappels:

Exemple: Sachant P(Z < 1,24) = 0,8925, on en déduit:

1/ (P(Z > 1,24) = 1 - P(Z < 1,24) = 1- $\boxed{0,8925}$ = 0,1075

2/ P(Z < -1,24) = P(Z > 1,24) = 0,1075

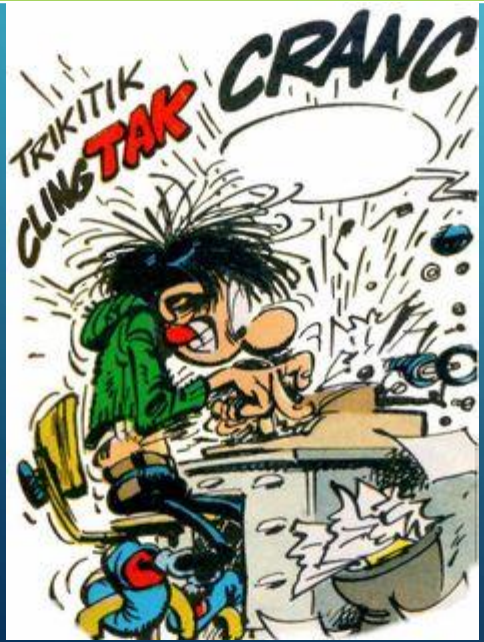
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251

VI) APPROXIMATION

En gros quoi…

Loi Binomiale → Loi de Poisson		
Si **n$>$ 50 ; p≤0,10 et np≤ 5**	Alors B(n ; p) → P(λ=np)	La loi Binomiale a ainsi été approximée par la loi de Poisson

Loi Binomiale → Loi Normale		
Si $\boldsymbol{np \geq 5}$ **et** $\boldsymbol{nq \geq 5}$	Alors B(n ; p) → N(np;$\sqrt{\boldsymbol{npq}}$)	La loi Binomiale a ainsi été approximée par la loi Normale



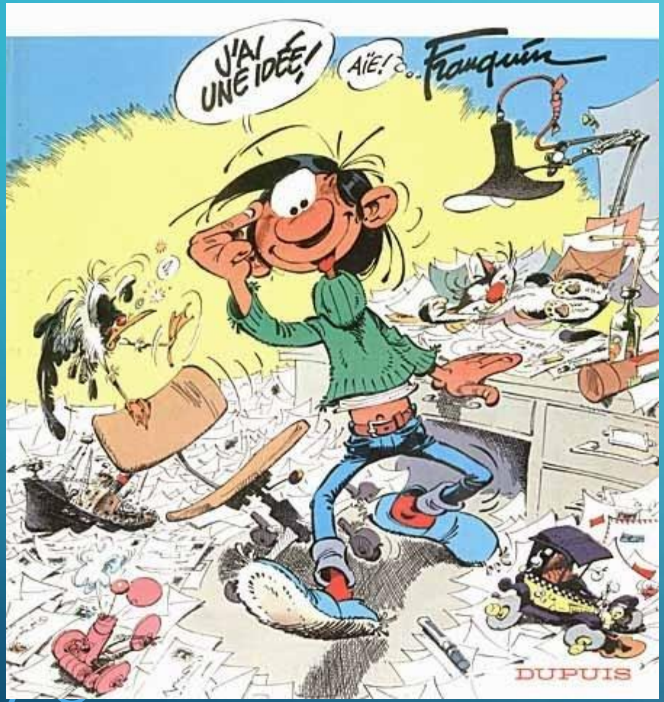
<- devant la Bioch à J-10 du cc

Loi de Poisson → Loi Normale		
Si $\lambda > 25$	Alors $P(\lambda) \rightarrow N(\lambda;\sqrt{\lambda})$	La loi de Poisson a ainsi été approximée par la loi Normale

Allez sur SOCRATIVE avec vos portables
LOGIN-Student-Room name : **PACESTTR**- cliquez sur Join

socrative by MasteryConnect

QRU



Un hôpital possède 100 défibrillateurs. La probabilité qu'un défibrillateur tombe en panne est de 0,01. On suppose que le fonctionnement d'un défibrillateur est indépendant des autres. X « nombre de défibrillateurs qui tombent en panne » suit une loi binomiale. **Donner la proposition correcte :**

A) On a B(100 ; 0,1)

B) On a : P(1)

C) On a : P(100 ; 0,01)

D) On a ; N(100 ; 0,01)

E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

Allez sur SOCRATIVE avec vos portables
LOGIN-Student-Room name : **PACESTTR**- cliquez sur Join

QRU

Et oui une approximation

A) On a B(100 ; 0,1) FAUX c'est B(100 ; 0,**0**1)

B) On a : P(1) VRAI on peutapproximer la loi binomiale par Poisson car $n = 100 > \mathbf{50}$; p=0,01 $\leq$ 0,10 et np=1 ≤ 5, avec $\lambda = np = 1$

C) On a : P(100 ; 0,01) FAUX juste non c'est une binomiale et une Poisson s'exprime pas ainsi

D) On a ; N(100 ; 0,01) FAUX idem

FIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIINNNNNNNNNN