Variables aléatoires, Lois de probabilités discrètes

I. DEFINITION

Une variable aléatoire est une **épreuve** aboutissant à des résultats aléatoires : les évènements élémentaires qui sont des nombres.

Ex 1: On lance un dé (= épreuve) et on lit le chiffre obtenu (=évènement élémentaire). Ici, on parle bien de variable aléatoire car le résultat est un nombre.

Ex 2 : On tire au sort un étudiant en médecine (= épreuve) et on lui demande sa mention au bac (= évènement élémentaire). Attention, on ne parle pas de variable aléatoire car la mention n'est pas un nombre.

Il existe 2 types de variables aléatoires :

Discrètes	Continues (=à densité)
Les résultats de l'expérience ont leur valeur dans un ensemble FINI ou INFINI DENOMBRABLE	Les résultats de l'expérience ont leur valeur dans un ensemble INDENOMBRABLE

II. VARIABLE ALEATOIRE DISCRETE

1. Loi de probabilités dscrètes

Soit « X » une variable aléatoire discrète sur un ensemble fondamental « Ω » à valeurs finies : X(Ω) = {x1,x2,...,xn,...}.

La Variable aléatoire « X » discrète obéit à une loi de probabilité.
Cette loi est définie par l'ensemble des probabilités pn (p1, p2, p3,..., pn) et de ses différentes éventualités xn (x1, x2, x3,..., xn). Ainsi, à chaque x_i on associe une probabilité de survenue p_i.

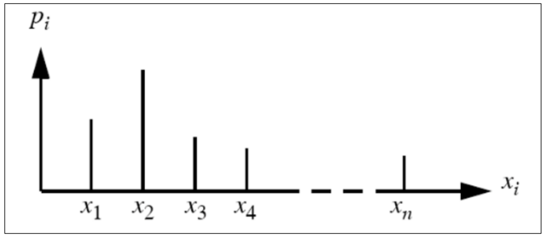
$$p_i = P(X = x_i)$$

$0 \leq pi \leq 1$ et **$\sum (pi) = 1$**

2. Représentation

On peut représenter les variables aléatoires discrètes sous forme de tableau ou de diagramme en bâton :

x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$



3. Paramètres

a) Moyenne

A chaque v-a, on associe une moyenne **μ** qui est la valeur moyenne des résultats de l'épreuve.

$$\mu = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum (x_ip_i)$$

b) Espérance

L'espérance mathématique correspond à la moyenne dans le domaine des «statistiques».
Elle est notée **E(X)**.

Elle traduit la tendance centrale de la variable aléatoire et il s'agit d'un indicateur de **POSITION** sur la distribution de probabilité de X.

$$E(X) = \mu = \sum (x_ip_i)$$

Théorèmes de l'espérance

- Soit X une variable aléatoire et k un nombre réel
  $E(X+k) = E(X) + k$
  $E(kX) = k\,E(X)$

- Soient X et Y deux variables aléatoires
  $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

- Cette expression se généralise à n variables aléatoires : l'espérance de la somme est la somme des espérances
  $E(\sum X_i) = \sum E(X_i)$

c) Variance et écart type

La variance est un indicateur de **DISPERSION** qui caractérise l'éloignement des valeurs prises par la v-a par rapport à la moyenne.

Une très faible variance signifie que toutes les valeurs de la variable sont proches de la moyenne (= moyenne représentative)

On note la variance σ^2 ou **Var(X)**, et l'écart type σ est **racine carrée de la variance**

$$\sigma^2 = \sum pi * (xi - \mu)^2$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E((X-\mu)^2) = E(X^2) - \mu^2$$

Pour *a* une constante, on montre que :

$Var(X + a) = Var(X)$

$Var(aX) = a^2\, Var(X)$

4. Variable centrée réduite

Centrée : consiste à soustraire la moyenne μ de la variable à chacune de ses valeurs initiales

Réduite : consiste à diviser toutes les valeurs que prend la variable par son écart-type « σ »

Soit **X**, variable aléatoire de moyenne μ et d'écart type σ. On définit la variable centrée réduite **Y** :

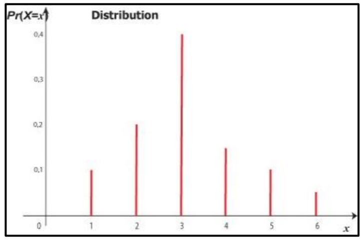
$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Elle a 2 propriétés : **E(Y) = 0** et **Var (Y) = 1**

<u>Nota</u> : L'intérêt de transformer les variables en « variables centrées réduites », notamment dans le cadre de la loi Normale, est d'obtenir des données indépendantes des unités (= sans dimensions) et des variables ayant une moyenne (μ = 0) et une dispersion (σ = 1) identique.

De cette façon, il est possible d'utiliser une seule table de probabilité (table de la loi Normale centrée réduite) pour déterminer la probabilité de n'importe quelles variables !

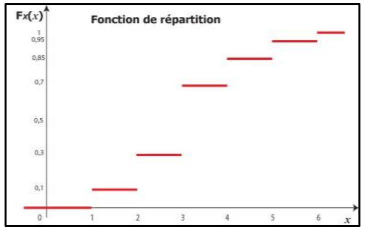
5. Fonctions de répartition et de distribution



La fonction de <u>distribution</u> est modélisée par un diagramme en bâtons, elle permet de voir la distribution des probabilités d'une variable aléatoire finie (discrète).

La fonction de <u>répartition</u> est une fonction **monotone croissante** : si a ≤ b alors F(a) ≤ F(b). On la représente par **une fonction en escalier discontinue**.

Il s'agit d'une fonction **cumulative** car elle somme toutes les probabilités pi correspondant aux xi survenus avant x.



III. LOIS DE PROBABILITES DISCRETES

1. Loi de Bernoulli : B(p)

Une épreuve de Bernoulli est une **épreuve unique** dont l'issue est soit « succès » soit « échec ».

- **<u>Paramètres</u>**

X : v-a donnant le **nombre de succès au cours de l'épreuve**

p : la probabilité du succès

q = 1-p : la probabilité de l'échec

- **<u>Formules</u>**

Soit la v-a X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p et **k** un réel égal à 1 en cas de succès ou 0 en cas d'échec.

P(X=1) = p et P(X=0) = q

$$P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k}$$

$$\mu = p$$

$$\sigma^2 = p\,(1\text{-}p) = pq$$

➢ ***Exemple :***

On lance un dé et on regarde si on obtient l'évènement attendu : « avoir un 6 ».
P(X=1) = 1/6 et P(X=0) = 5/6

2. Loi Binomiale : B(n;p)

C'est une épreuve répétée de Bernouilli. On réalise n essais **indépendants** d'une même expérience aléatoire ayant pour issue soit un « succès », soit un « échec ».

➢ **Paramètres**

n : le nombre d'essais indépendants
p : probabilité d'un succès
X : v-a donnant le **nombre de succès à l'issue des n essais**

➢ **Formules**

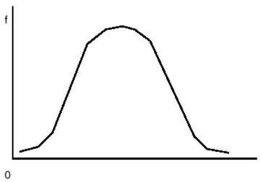
Soit X la v-a qui suit une loi binomiale de paramètre n et p, avec **k** étant un nombre réel.

$$P(X=k) = C^k_n p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mu = np$$
$$\sigma^2 = np(1-p) = npq$$

➢ **Propriétés**

- Pour $p = 0{,}5$ la forme du diagramme des probabilités d'une distribution normale est symétrique
- Si $p > 0{,}5$ on dit que la distribution est « asymétrique positive »
- Si $p < 0{,}5$ elle est « asymétrique négative ».
- Quand n est grand, la forme du diagramme de distribution devient symétrique



➢ ***Exemple :***

On lance un dé 3 fois avec comme objectif « obtenir un 6 » (=succès). Chaque lancer de dé est ***indépendant*** *du lancer précédent.*

Soit X ~ B (3 ; 1/6)

La probabilité d'obtenir deux succès est :

$$P(X=2) = c_3^2 * \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-2}$$

$$P(X=2) = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} * \frac{1}{36} * \frac{5}{6}$$

$$P(X=2) = 3 * \frac{1}{36} * \frac{5}{6}$$

$$P(X=2) = 0{,}007$$

➢ **Particularité**

- Soit *X1 ~ B(n1;p)* et *X2 ~ B(n2 ;p)*
  Alors ***X1 + X2 ~ B(n1+n2 ;p)***

Ce résultat peut être généralisé pour la somme d'un nombre fini de v-a binomiales indépendantes et de même paramètre p.

- **Le tirage au sort**

Pour étudier la totalité d'une population on procède à un échantillonnage de celle-ci. De ce fait, grâce à un tirage au sort (=randomisation), on constitue plusieurs échantillons de la population auxquels on appliquera notre loi binomiale.

Le TAS peut être :

- **Non exhaustif** (=indépendant) : Les éléments sélectionnés sont remis dans l'échantillon après le tirage. → **p reste constant**
- **Exhaustif** (=dépendant des autres tirages) : il n'y a pas de remise → **p varie** au fils des tirages

On définit donc le taux de sondage = **n/N**
Avec n la taille de l'échantillon et N la taille de la population

Si $n/N \leq 0{,}10$ on applique la loi binomiale
(même si le tirage est exhaustif)
Si $n/N > 0{,}10$ on applique la loi hypergéométrique

3. Loi Hypergéométrique : H(N,D,n)

Soit une population de N individus parmi lesquels D ont un caractère donné. On prélève un échantillon n de cette population N. Les individus de l'échantillon sont tirés simultanément (l'ordre de tirage n'a pas de sens) et **sans remise**.

- **Paramètres**

X : la v-a donnant le **nombre d'individus possédant le caractère donné dans l'échantillon de n individus.**
N : effectif de la population
D : nombre de personnes présentant le caractère étudié dans la population
D/N : probabilité p d'avoir le caractère étudié dans la population
P(X=k) : **probabilité d'obtenir k individus présentant le caractère dans un échantillon de n individus**

- **Formules**

Soit X ~ H(N ;D ;n), et **k** un nombre réel :

$$P(X=k) = \frac{C_D^k * C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

$$\mu = \frac{nD}{N} = np$$

$$\sigma^2 = \frac{nD}{N} * \frac{N-D}{N} * \frac{N-n}{N-1} = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) npq$$

- **Utilisation de la loi**

« La loi hypergéométrique permet la conception de **plans d'échantillonnages** pour le contrôle de réception »

- ***Exemple***

Dans une population de 1000 habitants, 150 possèdent les yeux vairons. On tire au sort 200 individus dans cette population. Quelle est la probabilité que la moitié de cet échantillon ait les yeux vairons ?

P(X=100) = $\frac{C_{150}^{100} * C_{1000-150}^{200-100}}{C_{1000}^{200}}$ *(on ne vous demandera jamais de développer)*

4. Loi Géométrique : G(p)

On répète des épreuves de Bernoulli **jusqu'à l'obtention du premier succès**. On comptabilise le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ce premier succès.

- **Paramètres**

p : probabilité d'avoir un succès
q : probabilité d'avoir un échec
X : v-a donnant le **nombre d'essais nécessaires jusqu'à l'obtention du premier succès**

- **Formules**

Soit X ~ G(p), et **k** un nombre réel

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1}$$

$$\mu = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

- **Utilisation de la loi**

« On utilise la loi géométrique pour étudier l'efficacité d'une **carte de contrôle** dans un dispositif de surveillance d'un processus de production »

- ***Exemple***

On lance un dé à six faces jusqu'à obtenir un « 6 ». La probabilité d'obtenir un 6 au bout de 3 essais est :
P(X=3) = 1/6 x (5/6)² = 25 / 216

5. Loi de Poisson : P(λ)

Elle est utilisée le plus souvent pour déterminer la probabilité qu'un certain nombre d'événements interviennent sur la base d'une unité de temps (ou d'autres unités : volume, surface, etc…).

➢ **Paramètres**

λ : taux moyen avec lequel un évènement particulier se produit en général
X : v-a qui donne le **nombre d'évènement particulier qui se produisent dans la situation étudiée**

➢ **Formules**

Soit X ~ P(λ) et **k** un nombre réel :

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$\mu = \sigma^2 = \lambda$

La moyenne et la variance sont égales à λ : cette égalité est une propriété mathématique qui permet d'indiquer le caractère poissonien d'une variable discrète → lorsque μ et σ^2 d'une variable sont égales à une même « valeur », alors cette variable suit la loi de Poisson et la « valeur » en question est notée λ.

➢ **Propriétés**

Soit $X_1 \sim P(\lambda_1)$ et $X_2 \sim P(\lambda_2)$
Alors $X1+X2 \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

➢ **Utilisation**

La loi de Poisson est utilisée le plus souvent pour déterminer le **nombre de défauts** (ou évènements) par unité (de temps, volume, surface…etc) dans le cadre de la **qualité**, la **fiabilité** et la **sécurité**.

➢ ***Exemple***

Dans le service des urgences, on a en moyenne 4 hospitalisations en deux heures. Quelle est la probabilité d'avoir 1 patient hospitalisé au cours d'une heure ?

λ= 4 hospitalisations / 2h = 2 hospitalisations / 1h = 2

P(X=1hospitalisation / 1h) = $\frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 2e^{-2}$

Explications pour votre compréhension

« La loi hypergéométrique permet la **conception de plans d'échantillonnages pour le contrôle de réception** »

Le contrôle de réception s'applique à un lot complet d'objets (=un lot de téléphones par exemple). Il permet de décider de l'acceptation ou du rejet du lot (=on garde le lot de téléphones ou on le rejette). Le contrôle de qualité permet aussi d'avoir une appréciation sur la qualité du lot (=qualité du lot de téléphones).

Pour effectuer ce contrôle, on a besoin d'élaborer des « plans d'échantillonnages » (=on va effectuer le contrôle sur un échantillon de téléphones du lot).

Ainsi la loi hypergéométrique permet de réaliser ce « plan d'échantillonnage » pour le contrôle de réception.

« On utilise la loi géométrique pour **étudier l'efficacité d'une carte de contrôle dans un dispositif de surveillance d'un processus de production** »

Dans certains domaines, on a un processus de production (=machine/appareil de production de téléphones par exemple). Le processus de production permet de produire, à la chaine, des objets de même nature. Mais il peut arriver qu'un dysfonctionnement du processus survienne, entraînant ainsi la production d'objets non conformes (=les téléphones produits ne marchent pas).

Pour pouvoir corriger, au plus vite, ce genre de problème, on observe la mise en place de dispositif de surveillance comme « une carte de contrôle ».
La carte de contrôle (ou diagramme de contrôle) permet d'évaluer la qualité de chaque objet produit. Ainsi dès qu'un problème survient, on peut le repérer grâce à notre carte.

La loi géométrique permet ainsi d'étudier l'efficacité d'une carte de contrôle. On observe bien l'analogie entre la loi et la carte de contrôle : elle permet de repérer le premier évènement anormal qui survient.