TUT ' RENTREE : BIOSTATS'

COURS N°4 : VARIABLES ALEATOIRES, LOIS DE PROBABILITE DISCRETES

SOMMAIRE

I. DEFINITION

Variable aléatoire

Epreuve aboutissant à des résultats aléatoires : les **évènements élémentaires** qui sont des **nombres**.

Discrètes	Continues (=à densité)
Les résultats de l'expérience ont leur valeur dans un ensemble **FINI** ou **INFINI DENOMBRABLE**	Les résultats de l'expérience ont leur valeur dans un ensemble **INDENOMBRABLE**

II. Variable aléatoire discrète

A/ LOI DE PROBABILITÉS DISCRÈTES

Soit « X » une variable aléatoire discrète sur un ensemble fondamental « Ω » à valeurs **finies** : X(Ω) = {x1,x2,...,xn,...}.

La Variable aléatoire « X » discrète obéit à une loi de probabilité.

Cette loi est définie par l'ensemble des **probabilités pn** (p1, p2, p3,…, pn) et de ses différentes **éventualités xn** (x1, x2, x3,…, xn).

$$p_i = P\,(X = x_i\,)$$

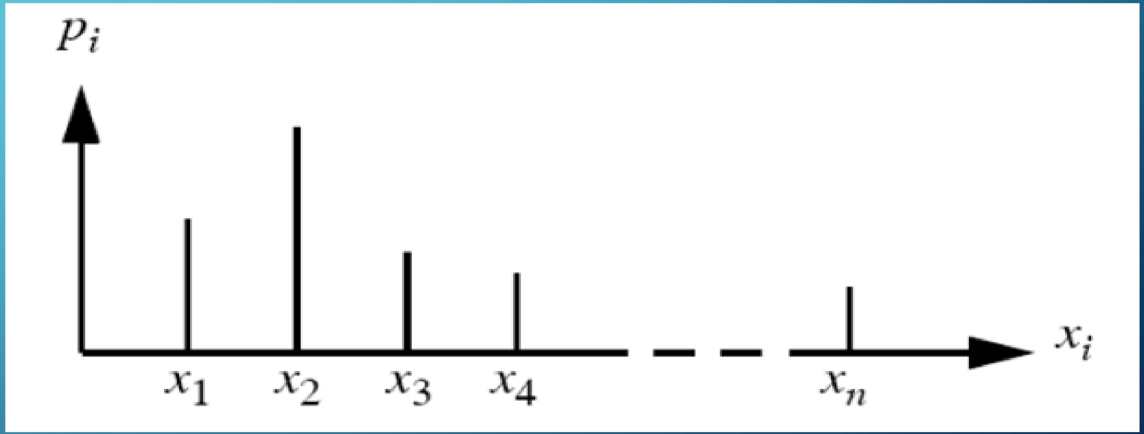
$$0 \leq pi \leq 1 \qquad \text{et} \qquad \sum (pi) = 1$$

B/ REPRÉSENTATION

Tableau

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

Diagramme en bâton



EXEMPLE

Soit X la variable « âge des enfants qui attrapent la varicelle »

Supposons que les valeurs de X aillent de 1 à 6

Les **éventualités** sont donc $x1 = 1an$; $x2 = 2ans$; …; $x6 = 6ans$

On trouve à l'issue d'un tirage au sort de 200 enfants:

Les **probabilités** sont

$p1 = p(1ans) = 0,2$

$p2 = 0,3$

$p3 = 0,05$

$p4 = 0,35$

$p5 = 0,08$

$p6 = 0,02$

EXEMPLE

Xi	1	2	3	4	5	6
Pi	0,2	0,3	0,05	0,35	0,08	0,02

C/ PARAMÈTRES

Moyenne

$$\mu = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum (x_ip_i)$$

C/ PARAMÈTRES

Espérance

$$\boxed{E(X) = \mu = \sum (x_i p_i)}$$

tendance centrale de la variable aléatoire

indicateur de **POSITION**

C/ PARAMÈTRES

Espérance

- $E(X+k) = E(X) + k$
- $E(kX) = k\,E(X)$
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- $E\left(\sum X_i\right) = \sum E(X_i)$

C/ PARAMÈTRES

<u>Variance</u>

$$\sigma^2 = \sum pi * (xi - \mu)^2$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E((X-\mu)^2) = E(X^2) - \mu^2$$

caractérise **<u>l'éloignement des valeurs</u>** prises par la v-a par **<u>rapport à la moyenne</u>**.

<u>indicateur de **DISPERSION**</u>

C/ PARAMÈTRES

Variance

- $Var(X + a) = Var(X)$
- $Var(aX) = a^2\ Var(X)$

EXERCICE

Calculez l'espérance et la variance. Est-ce que la moyenne est représentative?

Xi	1	2	3	4	5	6
Pi	0,2	0,3	0,05	0,35	0,08	0,02

Rappel

$Var(X)$
$= E((X-\mu)^2)$
$= E(X^2) - \mu^2$

EXERCICE

Xi	1	2	3	4	5	6
Pi	0,2	0,3	0,05	0,35	0,08	0,02

$E(X) = 1x0{,}2 + 2x0{,}3 + 3x0{,}05 + 4x0{,}35 + 5x0{,}08 + 6x0{,}02 = \underline{\mathbf{2{,}87}}$

$V(X) = [\ 1^2x0{,}2 + 2^2x0{,}3 + 3^2x0{,}05 + 4^2x0{,}35 + 5^2x0{,}08 + 6^2x0{,}02\ ] - 2{,}87^2$

$= 10{,}17 - 8{,}24$

$= \underline{\mathbf{1{,}93}}$

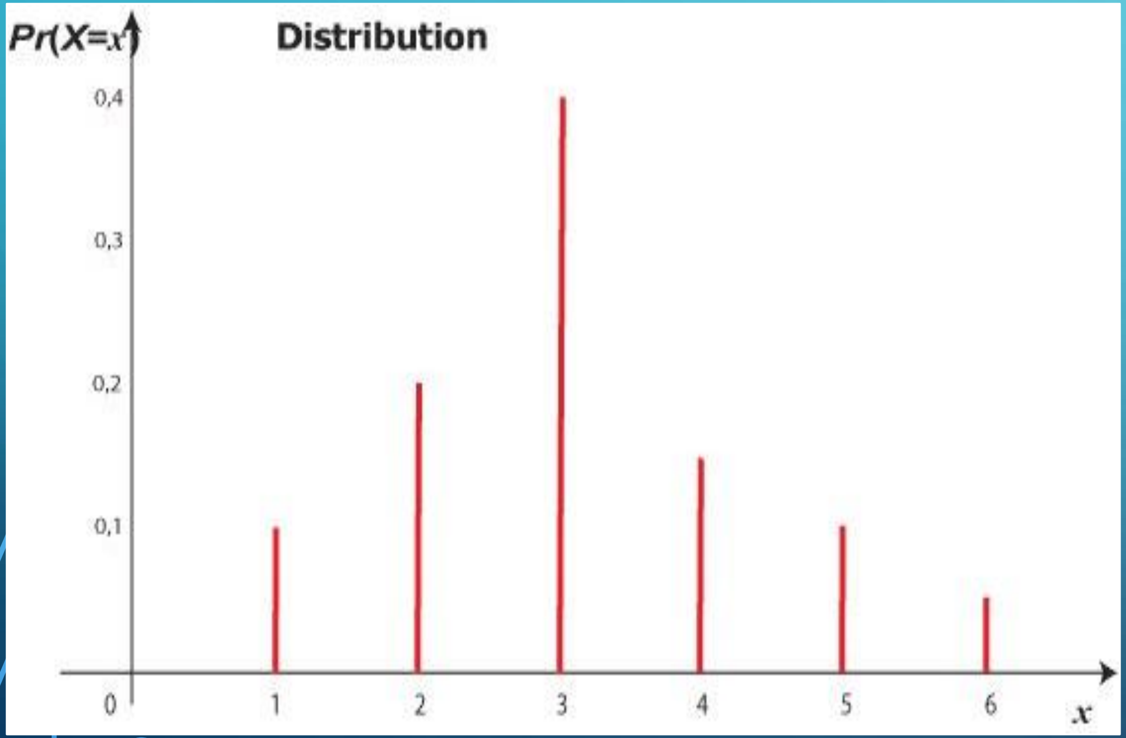
D/ VARIABLE CENTRÉE RÉDUITE

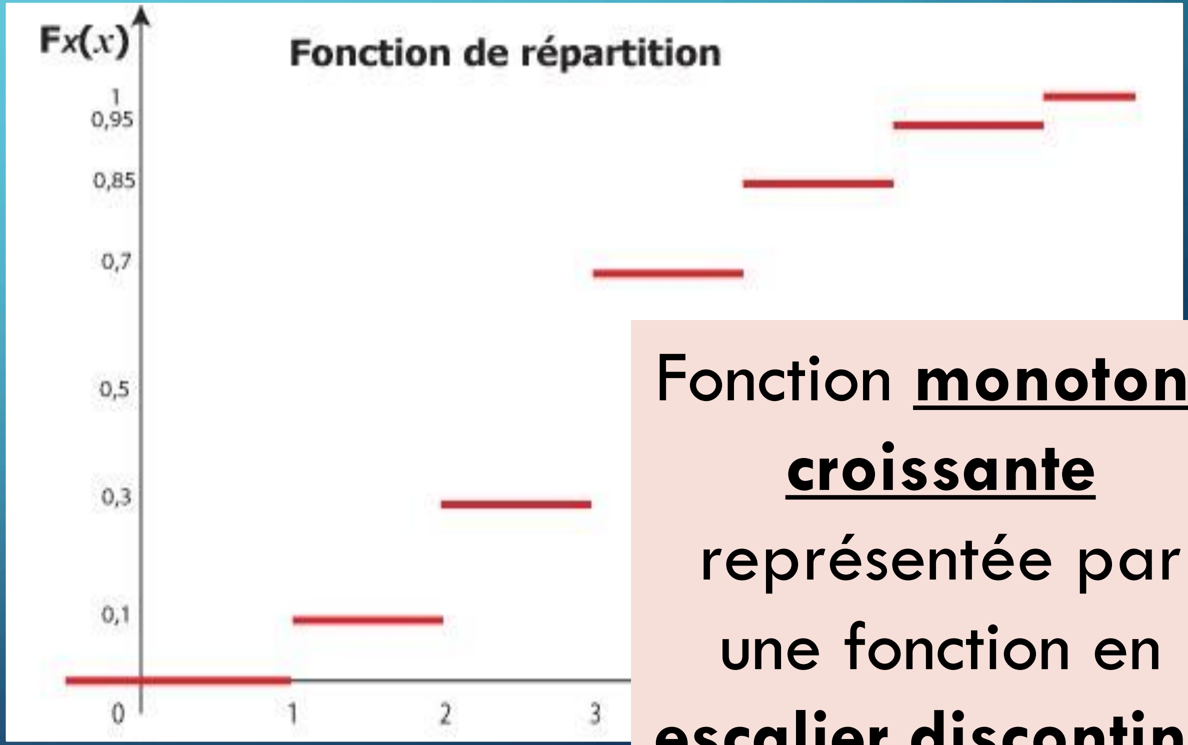
$$\boxed{Y = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

$E\ (Y) = 0$

$Var\ (Y) = 1$

E/ FONCTIONS DE RÉPARTITION ET DE DISTRIBUTION





Fonction <u>**monotone croissante**</u> représentée par une fonction en <u>**escalier discontinu**</u>

III. LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

A/ LOI DE BERNOUILLI

épreuve <u>UNIQUE</u> dont l'issue est soit « succès » soit « échec »

$$P(X=1) = p$$

$$P(X=0) = q$$

X : v-a donnant le nombre de succès au cours de l'épreuve

A/ LOI DE BERNOUILLI

p : probabilité succès

$q = 1-p$: probabilité échec

A/ LOI DE BERNOUILLI B(P)

$$P(X = k) = p^k(1 - p)^{1-k}$$

$\mu = p$

$\sigma^2 = p\ (1\text{-}p) = pq$

QRU

En France, la « navette » Air-France permettant de se déplacer entre Nice et Paris est généralement en retard une fois sur vingt-cinq. Sachant que j'ai un rendez-vous tout suite après mon vol, un éventuel retard me ferait rater mon rendez-vous. Quelle est la probabilité que j'arrive à l'heure à ce rendez-vous?

A) 0,04
B) 0,96
C) 0,038
D) 0,4
E) Tout est faux

Rappel

$$P(X = k) = p^k(1 - p)^{1-k}$$

QRU

En France, la « navette » Air-France permettant de se déplacer entre Nice et Paris est généralement en retard une fois sur vingt-cinq. Sachant que j'ai un rendez-vous tout suite après mon vol, un éventuel retard me ferait rater mon rendez-vous. Quelle est la probabilité que j'arrive à l'heure à ce rendez-vous?

A) 0,04

B) 0,96

C) 0,038

D) 0,4

E) Tout est faux

$p = 0,04$

$$P(X = 0) = 0,04\text{^}0 * (0,96)\text{^}1$$

B/ LOI BINOMIALE

épreuve répétée de Bernouilli

On réalise n essais **<u>INDÉPENDANTS</u>** d'une même expérience aléatoire ayant pour issue soit un « succès », soit un « échec ».

X : v-a donnant le nombre de succès à l'issue des n essais

B/ LOI BINOMIALE

p : probabilité succès

$q = 1\text{-}p$: probabilité échec

n : nombre d'essais indépendants

B/ LOI BINOMIALE B(n;P)

$$P(X = k) = C^{k}_{n} p^{k} (1 - p)^{n-k}$$

$\mu = np$

$\sigma^2 = np(1-p) = npq$

B/ LOI BINOMIALE

On reconnaît la formule des combinaisons!!!

$$C^{p}{}_{n} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

B/ LOI BINOMIALE

<u>Propriétés</u>

- $p = 0,5$: diagramme symétrique
- $p > 0,5$: distribution « asymétrique positive »
- $p < 0,5$: « asymétrique négative ».
- n est grand : diagramme symétrique

B/ LOI BINOMIALE

Particularité

$X1 \sim B(n1\,;p)$ et $X2 \sim B(n2\,;p)$

$$X1 + X2 \sim B(n1+n2\,;p)$$

QRU

La probabilité que vous soyez dans le numérus clausus au tutorat chaque mardi est de 0,5. Vous y allez 5 fois de manière indépendante : le mardi d'avant n'influe pas sur le suivant.

Quelle est la probabilité que vous soyez 3 fois dans le numérus?

A) On utilise une loi binomiale B(3 ; 0,5)

B) 3,125 x 10^-1

C) 0,03125

D) P(X=3) = 0,5^3 * 0,5^2

E) Tout est faux

Rappel

$$P(X = k) = C^k{}_n p^k (1 - p)^{n-k}$$

QRU

La probabilité que vous soyez dans le numérus clausus au tutorat chaque mardi est de 0,5. Vous y allez 5 fois de manière indépendante : le mardi d'avant n'influe pas sur le suivant.

Quelle est la probabilité que vous soyez 3 fois dans le numérus?

A) On utilise une loi binomiale B(3 ; 0,5)

B) 3,125 x 10^-1

C) 0,03125

D) P(X=3) = 0,5^3 * 0,5^2

E) Tout est faux

X « nombre de fois dans le numérus clausus »

X ~ B (5 ; 0,5)

$$P(X=3)=c_5^3 * 0{,}5^3(1-0{,}5)^{5-3}$$

$$P(X=3)=\frac{5!}{3!\,(5-3)!} * 0{,}5^3 \; * 0{,}5^2$$

$$P(X=3)=\frac{5*4}{2} * 0{,}125 * 0{,}25$$

$$P(X=3)=10 * 0{,}125 * 0{,}25$$

$$\underline{P(X=3)=\mathbf{3{,}125 \; * 10^{-1}}}$$

B/ LOI BINOMIALE

Le tirage au sort

Non exhaustif = indépendant	Exhaustif = dépendant
Remise des éléments p reste constant	**Pas de remise** des éléments p varie

B/ LOI BINOMIALE

Le taux de sondage

$\boxed{n/N}$

n : taille de l'échantillon

N : taille de la population

Si $n/N \leq 0{,}10$: loi binomiale

Si $n/N > 0{,}10$: loi hypergéométrique

C/ LOI HYPERGÉOMÉTRIQUE

Soit une population de N individus parmi lesquels D ont un caractère donné.

On prélève un échantillon n de cette population N.

Les individus de l'échantillon sont tirés **simultanément** et **sans remise.**

X : la v-a donnant le nombre d'individus possédant le caractère donné dans l'échantillon de n individus.

C/ LOI HYPERGÉOMÉTRIQUE

N : effectif de la population
n : échantillon
D : nombre de personnes présentant le caractère étudié dans la population
D/N : probabilité p d'avoir le caractère étudié dans la population

P(X=k) : probabilité d'obtenir k individus présentant le caractère dans un échantillon de n individus

C/ LOI HYPERGÉOMÉTRIQUE H(N;D;n)

$$P(X = k) = \frac{C_D^k * C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

$$\mu = \frac{nD}{N} = np$$

$$\sigma^2 = \frac{nD}{N} * \frac{N-D}{N} * \frac{N-n}{N-1} = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) npq$$

C/ LOI HYPERGÉOMÉTRIQUE

« La loi hypergéométrique permet la conception de **plans d'échantillonnages** pour le contrôle de réception »

Rappel

$$P(X = k) = \frac{C_D^k * C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

QRU

Dans une population de 1000 habitants, 250 attrapent un rhume en hiver. On tire au sort 400 individus dans cette population. Quelle est la probabilité qu'un quart ait le rhume?

A) $\frac{C_{250}^{100} * C_{750}^{300}}{C_{1000}^{400}}$

B) $\frac{C_{100}^{250} * C_{750}^{300}}{C_{1000}^{400}}$

C) $\frac{C_{250}^{100} * C_{300}^{750}}{C_{1000}^{400}}$

D) $\frac{C_{750}^{300} * C_{4000}^{100}}{C_{1000}^{400}}$

QRU

Dans une population de 1000 habitants, 250 attrapent un rhume en hiver. On tire au sort 400 individus dans cette population. Quelle est la probabilité qu'un quart ait le rhume?

A) $\dfrac{C_{250}^{100} * C_{750}^{300}}{C_{1000}^{400}}$

B) $\dfrac{C_{100}^{250} * C_{750}^{300}}{C_{1000}^{400}}$

C) $\dfrac{C_{250}^{100} * C_{300}^{750}}{C_{1000}^{400}}$

D) $\dfrac{C_{750}^{300} * C_{4000}^{100}}{C_{1000}^{400}}$

QRU

N = 1000

n = 400

D = 250

k = 0,25 * 400 = 100

$$\frac{C_{250}^{100} * C_{1000-250}^{400-100}}{C_{1000}^{400}}$$

D/ LOI GÉOMÉTRIQUE

On répète des épreuves de Bernoulli **jusqu'à l'obtention du PREMIER SUCCÈS**.
On comptabilise le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ce premier succès.

X : v-a donnant le nombre d'essais nécessaires jusqu'à l'obtention du premier succès

D/ LOI GÉOMÉTRIQUE

p : probabilité d'avoir un succès

P(X=k) = La probabilité d'obtenir un succès après k essais

D/ LOI GÉOMÉTRIQUE G(P)

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} = pq^{k-1}$$

$$\mu = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = \frac{1 - p}{p^2}$$

C/ LOI GÉOMÉTRIQUE

« On utilise la loi géométrique pour étudier l'efficacité d'une **carte de contrôle** dans un dispositif de surveillance d'un processus de production »

QRU

Une infirmière réussi a bien piquer un patient à l'intérieur du coude 1 fois sur 5. Quelle est la probabilité qu'elle y arrive au bout de 3 essais?

A) 0,16

B) 0,128

C) 0,032

D) 32

E) Tout est faux

Rappel

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} = pq^{k-1}$$

QRU

Une infirmière réussi a bien piquer un patient à l'intérieur du coude 1 fois sur 5.

Quelle est la probabilité qu'elle y arrive au bout de 3 essais?

A) 0,16
B) 0,128
C) 0,032
D) 32
E) Tout est faux

p = 0,2

P (X=3) = 0,2 * 0,8^2 = 0,2 * 0,64 = 0,128

E/ LOI DE POISSON

Déterminer la probabilité qu'un certain nombre d'événements interviennent sur la base d'une **UNITÉ DE TEMPS** (ou d'autres unités : volume, surface, etc…).

X : v-a qui donne le nombre d'évènement particulier qui se produisent dans la situation étudiée

λ : taux moyen avec lequel un évènement particulier se produit en général

E/ LOI DE POISSON P(λ)

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$\mu = \sigma^2 = \lambda$

E/ LOI DE POISSON

Propriétés

Soit $X_1 \sim P(\lambda_1)$ et $X_2 \sim P(\lambda_2)$

Alors $\boldsymbol{X1+X2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)}$

QRU

Un hôpital reçoit 5 appels par minutes tous les jours de la semaine. Quelles est la probabilité qu'ils en reçoivent 2 en une heure?

$A)\dfrac{5^2 e^{-5}}{2!}$

$C)\dfrac{300^3 e^{-300}}{3!}$

$B)\dfrac{300^2 e^{-300}}{2!}$

$D)\dfrac{2^{300} e^{-2}}{300!}$

QRU

Un hôpital reçoit 5 appels par minutes tous les jours de la semaine. Quelles est la probabilité qu'ils en reçoivent 2 en une heure?

A) $\frac{5^2 e^{-5}}{2!}$

B) $\frac{300^2 e^{-300}}{2!}$

C) $\frac{300^3 e^{-300}}{3!}$

D) $\frac{2^{300} e^{-2}}{300!}$

$\lambda = 5appels / min = 5x60appels / h$

$= 300appels / h$

$$P(x = 2) = \frac{300^2 e^{-300}}{2!}$$

Quelle loi utiliser???

QRU

La probabilité qu'une personne soit allergique est de 10^-3. On considère un échantillon de 1000 personnes. On prend les personnes unes par unes de manière indépendante et on note si elles sont allergiques.

On note X la variable « nombre de personnes allergiques »

Quelles sont les propositions vraies?

A) X suit une loi binomiale B(10^-3;1000)

B) $P(X=3)= 0{,}003^{3}*0{,}997^{997}$

C) X suit une loi binomiale B(1000;10^-3)

D) X suit une loi de poisson de λ=10^-3

E) Tout est faux

QRU

La probabilité qu'une personne soit allergique est de 10^-3. On considère un échantillon de 1000 personnes. On prend les personnes unes par unes de manière indépendante et on note si elles sont allergiques.

On note X la variable « nombre de personnes allergiques »

Quelles sont les propositions vraies?

A) X suit une loi binomiale B(10^-3;1000)

B) $P(X=3)= 0,003^{3}*0,997^{997}$

C) X suit une loi binomiale B(1000;10^-3)

D) X suit une loi de poisson de λ=10^-3

E) Tout est faux