Lois de distribution de probabilité d'une variable

LOIS DE PROBABILITÉS DISCRÈTES

→ Bernoulli

Succès / Échec

$$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}=p^k q^{1-k}$$

<u>En cas de succès</u> : $k=1 \Rightarrow P(X=1)=p^1(1-p)^0=p$

<u>En cas d'échec</u> : $k=0 \Rightarrow P(X=0)=p^0(1-p)^1=1-p$

→ Binomiale

"Remise" (car N > > n donc les variations de p sont négligeables)

Répétition de Bernoulli n fois de façon indépendante et sans remise (tirage non exhaustif) avec :

$$\frac{n}{N} \leqslant 0{,}10$$

$n = \text{taille échantillon}$
$N = \text{taille population}$
$\frac{n}{N} = \text{taux de sondage}$

$X \sim B(n;p)$
$k \in [0;n]$

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=C_n^k p^k q^{n-k}$$

→ Poisson

Loi des événements rares, variable " en fonction de " *(temps, surface, litre …).*

$\lambda \leqslant 25$

$X \sim P(\lambda)$
$X_1+X_2 \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$\lambda > 0 \qquad k \in \mathbb{N}$

	Bernoulli	Binomiale	Poisson
Espérance (=moyenne) :	$\mu=p$	$\mu=np$	$\mu=\lambda$
Variance :	$\sigma^2=p(1-p)=pq$	$\sigma^2=np(1-p)=npq$	$\sigma^2=\lambda$

APPLICATION (Bernoulli)

Suite au lancée d'un dé non truqué numéroté de 1 à 6, on considère que que l'on remporte la partie d'un jeu si l'on obtient un nombre multiple de 3.

<u>*Quelle est la probabilité de remporter la partie ?*</u> <u>***SUCCES***</u>
Seules les faces 3 et 6 sont multiples de 3, soit 2 faces sur les 6.

$$k=1 \Rightarrow P(X=1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

<u>*Quelle est la probabilité d'échouer la partie?*</u> <u>***ECHEC***</u>

$$k=0 \Rightarrow P(X=0)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

<u>*Donner l'espérance :*</u> $\mu=\frac{1}{3}$

<u>*Donner la variance :*</u> $\sigma^2=\frac{1}{3}x\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

APPLICATION (Binomiale)

Suite au lancée d'un dé non truqué numéroté de 1 à 6, on considère que que l'on remporte la partie d'un jeu si l'on obtient un nombre multiple de 3. On répète 4 fois le lancée.

<u>*Quelle est la probabilité de remporter 3 fois la partie ?*</u> (Question équivalente : Quelle est la probabilité d'échouer 1 fois la partie?)

$$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{4!}{3!\,x\,1!}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1$$

$$P(X=3)=\frac{4x3x2}{3x2}x\frac{1}{3x3x3}x\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$$

<u>*Donner l'espérance :*</u> $\mu=4x\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

<u>*Donner la variance :*</u> $\sigma^2=4x\frac{1}{3}x\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$

APPLICATION (Poisson)

Selon une étude portée sur les hirondelles, on a constaté que 2 hirondelles survolées le ciel des régions tempérées au printemps toutes les 30 min.

<u>*Quelle est la probabilité de voir passer seulement 3 hirondelles en une heure ?*</u>

- <u>**1ère étape**</u> : Définir le paramètre λ

Toutes les 30 min ↔ 2 hirondelles, mais dans la question il est précisé "en une heure", on a donc :

► Toutes les heures ↔ 4 hirondelles d'où λ = 4

On vérifie au passage $\lambda \leqslant 25$

- <u>**2ème étape**</u> : Application numérique

La question impose k = 3, ce qui nous donne :

$$P(X=3)=\frac{4^3 e^{-4}}{3!}$$

<u>*Donner le nombre moyen d'hirondelles passant en une heure :*</u>

$$\mu=4$$

<u>*Donner la variance :*</u> $\sigma^2=4$

Lois de distribution de probabilité d'une variable

LOIS DE PROBABILITES DISCRETES

→ Géométrique

Épreuves de Bernoulli répétées jusqu'à l'obtention du 1er succès

$X \sim G(p)$

$k \in \mathbb{N}^{\circ}$

$$\boxed{P(X=k)=p(1-p)^{k-1}=pq^{k-1}}$$

$$\mu=\frac{1}{p}$$

$$\sigma^2=\frac{1-p}{p^2}$$

APPLICATION

Soit une pièce déséquilibrée que l'on lance à plusieurs reprise. Elle tombe sur face avec une probabilité de $\frac{1}{3}$. On considère que l'on gagne le jeu si dès que la pièce tombe sur face.

<u>Quelle est la probabilité de gagner au bout de 5 lancées ?</u>

Ici on pose k = 5. On sait que la probabilité d'obtenir face est de p= $\frac{1}{3}$.

On a donc : $P(X=5)=\frac{1}{3}x\left(\frac{2}{3}\right)^4$

→ Hypergéométrique

Pas de remise (car $N \approx n$, les variations de p ne sont plus négligeables)

$\frac{n}{N} \geqslant 0{,}10$

Population de N individus présentant D caractère étudié

Échantillon de n individus présentant d caractère étudié

$\frac{D}{N}=p$; $q=1-p$; $min(0;n-D) \leqslant k \leqslant max(n;D)$

S n est petit devant N alors $\frac{N-n}{N-1} \approx 1$

$$\boxed{P(X=k)=\frac{C_D^d x C_{N-D}^{n-d}}{C_N^n}}$$

$\mu=\frac{nD}{N}=np$ **avec** $p=\frac{D}{N}$

$\sigma^2=\frac{nD}{N}x\frac{N-D}{N}x\frac{N-n}{N-1}=\left(\frac{N-n}{N-1}\right)np(1-p)=\left(\frac{N-n}{N-1}\right)npq$ **avec** $q=\frac{N-D}{N}$

APPLICATION

Une boîte contient 10 articles (N) dont 4 défectueux (D). On en tire 3 au hasard (n).

<u>Quelle est la probabilité pour que, parmi les 3 tirés au sort, 2 soient défectueux (k) ?</u>

On a : c_{10}^3 est l'ensemble de tous les échantillons possibles contenant 3 articles sur 10. → il y a donc $\frac{1}{C_{10}^3}$ chances de tirer au sort 3 articles sur 10. Or on a la possibilité de tirer 2 articles défectueux sur les 4 articles défectueux totaux, soit C_4^2 .

Sachant qu'on tire 3 articles, il nous reste 1 chance que l'article soit défectueux sur les 6 articles non défectueux totaux, soit C_6^1 .

En conclusion, on a : $\frac{(C_4^2 \times C_6^1)}{C_{10}^3}$.

<u>Donner l'espérance :</u> $\mu=\frac{3x4}{10}=\frac{6}{5}$

<u>Donner la variance :</u> $\sigma^2=\frac{10-3}{10-1}x3x\frac{4}{10}x\frac{6}{10}=\frac{14}{25}$

Lois de distribution de probabilité d'une variable

LOIS DE PROBABILITES CONTINUES

→ Loi uniforme

$$X \sim U([a;b]) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$Si\ x \notin [a;b] \Rightarrow f(x) = 0$$

$$P(X \in [\alpha;\beta]) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

$$P(X \leqslant x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dx$$

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

APPLICATION

Une enquête effectuée auprès des étudiants de PACES a révélée que la durée de trajet domicile – faculté variée entre 30 min et 2 heures. On décide d'interroger un étudiant au hasard. Soit X la variable aléatoire égale au temps de trajet de l'étudiant exprimé en heure.

$$X \sim U([0{,}5;2]) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2-0{,}5} = \frac{2}{3}$$

Quelle est la probabilité que la durée du trajet soit comprise entre une heure et une heure et demie ?

$$P(X \in [1;1{,}5]) = \frac{1{,}5-1}{2-0{,}5} = \frac{0{,}5}{1{,}5} = \frac{1}{3}$$

Donner la durée moyenne du trajet domicile – faculté : $\mu = \frac{0{,}5+2}{2} = 1{,}25\,h$

Donner la variance : $\sigma^2 = \frac{(2-0{,}5)^2}{12} = \frac{3}{16}$

→ Loi exponentielle de paramètre λ > 0

λ = taux de défaillance instantanée

$$\lambda > 0\,;\, x \geqslant 0$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$P(X \in [a;b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\,dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Durée de vie sans vieillissement

La durée de vie au-delà de l'instant t est indépendante de l'instant t.

$$P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$$

$$P(X < a) = 1 - e^{-\lambda a}$$

$$P(X > a) = e^{-\lambda a}$$

NB : Lien avec la loi de Poisson : Si un événement se réalise selon une loi de Poisson de paramètre λ, le temps entre deux réalisations consécutives de l'événement considéré est distribué selon une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\lambda}$.

$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

APPLICATION

Le nombre d'enfants par ménage en France suit une loi exponentielle de paramètre 2. On sélectionne au hasard un ménage en France.

Quelle est la probabilité que le ménage sélectionné ait un nombre d'enfants variants entre 3 et 4 ?

D'après l'énonce, λ = 2. On cherche la probabilité que X soit compris entre 3 et 4, soit :

$$P(X \in [3;4]) = e^{-2x3} - e^{-2x4} = e^{-6} - e^{-8}$$

Quelle est la probabilité que le ménage sélectionné ait moins de 3 enfants ?

$$P(X < 3) = 1 - e^{-2x3} = 1 - e^{-6}$$

Quelle est la probabilité que le ménage sélectionné ait plus de 4 enfants ?

$$P(X > 4) = e^{-2x4} = e^{-8}$$

Sachant que le ménage sélectionné a déjà 2 enfants, quelle est la probabilité il ait plus d'1 enfant par la suite ?

→ Application du principe de "Durée de vie sans vieillissement", autrement dit : on ne tient pas compte du fait que le ménage sélectionné ait déjà 2 enfants. Ce qui revient à calculer seulement la probabilité d'avoir plus d'1 enfant.

$$P_{X \geqslant 2}(X \geqslant 2+1) = P(X \geqslant 1) = e^{-2x1} = e^{-2}$$

Lois de distribution de probabilité d'une variable

LOIS DE PROBABILITES CONTINUES

→ Loi Normale Centrée Réduite

$$X \sim N(0;1) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{x}}$$

Changement de variable $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ pour $X \sim N(\mu;\sigma)$

$\mu = 0$

$\sigma^2 = 1$

→ Loi Normale

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

10 chances sur 100 pour que X < μ – 1,65 σ ou X > μ + 1,65 σ	**α = 10 %**
5 chances sur 100 pour que X < μ – 1,96 σ ou X > μ + 1,96 σ	**α = 5 %**
1 chance sur 100 pour que X < μ – 2,58 σ ou X > μ + 2,58 σ	**α = 1 %**
1 chance sur 1000 pour que X < μ – 3,30 σ ou X > μ + 3,30 σ	**α = 0,1 %**

APPLICATION

1er Exercice

$X \sim N(2;2)$; On cherche $P(X \leqslant 4{,}5)$.

→ Effectuer le changement de variable de sorte à ce que le nouvelle variable Z suive $N(0;0)$

$$P(X \leqslant 4{,}5) = P\left(\frac{X-2}{2} \leqslant \frac{4{,}5-2}{2}\right) = P(Z \leqslant 1{,}25)$$

→ Lire dans la table de la Loi Normale Centrée Réduite $N(0;1)$ *donnant «* $P(X \leqslant t)$ *»*

A l'intersection de la ligne 1,2 et de la colonne 0,05 (1,2 + 0,05 = 1,25), on lit 0,8944.

Donc : $P(X \leqslant 4{,}5) = P(Z \leqslant 1{,}25) = 0{,}8944$

2ème Exercice

Suite du premier exercice – Même énoncé – On cherche cette fois-ci $P(X \geqslant 4{,}5)$

On a vu que $P(X \leqslant 4{,}5) = 0{,}8944$. Or $P(X > x) = 1 - P(X \leqslant x)$

Donc : $P(X > 4{,}5) = 1 - P(X \leqslant 4{,}5) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$

3ème Exercice

$N(8;4)$; On cherche cette fois-ci $P(8 < X < 12)$.

→ Appliquer la formule $P(x_1 < X < x_2) = P\left(Z \leqslant \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - P\left(Z \leqslant \frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$

$$P(8 < X < 12) = P\left(Z \leqslant \frac{12-8}{4}\right) - P\left(Z \leqslant \frac{8-8}{4}\right) = P(Z \leqslant 1) - P(Z \leqslant 0)$$

→ Chercher dans la table de la Loi Normale Centrée Réduite $P(Z \leqslant 1)$ *et* $P(Z \leqslant 0)$

Donc : $P(8 < X < 12) = P(Z \leqslant 1) - P(Z \leqslant 0) = 0{,}8413 - 0{,}5000 = 0{,}3413$

APPLICATION

4ème Exercice

$X \sim N(3;2)$; Déterminer x pour $P(X \leqslant x) = 0{,}4207$

→ Effectuer le changement de variable de sorte à ce que le nouvelle variable Z suive $N(0;0)$

$$P(X \leqslant x) = P\left(\frac{X-3}{2} \leqslant z\right) = P(Z \leqslant z) = 0{,}4207$$

→ La table de la Loi Normale Centrée Réduite donnent uniquement des probabilités variant de 0,5000 à 1,0000 , calculer $P(Z \leqslant -z) = P(Z \geqslant z) = 1 - P(Z \leqslant z) = 1 - 0{,}4207 = 0{,}5793$

→ Rechercher la valeur $0{,}5793$ *dans la table pour déterminer* $-z$

On trouve 0,5793 à l'intersection de la ligne 0,2 et de la colonne 0,00. On a donc $-z = 0{,}2 + 0{,}00 = 0{,}2$

→ En déduire la valeur de x.

On a donc : $z = -0{,}2 \leftrightarrow \frac{x-3}{2} = -0{,}2$. D'où : $x = 2{,}6$

Lois de distribution de probabilité d'une variable

VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

Indicateur de position

- **Moyenne / Espérance μ** :

La moyenne μ de la variable aléatoire X est la valeur moyenne des résultats que l'on obtiendrait en répétant indéfiniment l'épreuve.

$$\mu = E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i$$

$$E(kX) = kE(X)$$
$$E(X+k) = E(X)+k$$

L'espérance de la somme est la somme des espérances : $E(X+Y)=E(X)-E(Y)$ que l'on généralise $E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$.

Indicateur de dispersion

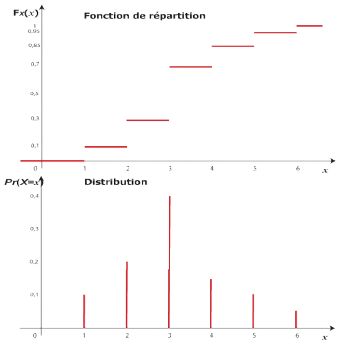
- **Variance σ²** :

Il s'agit d'un indicateur de dispersion qui caractérise à quel point les réalisations successives de X sont plus ou moins éloignées de μ.

- **Ecart-type σ** :

Il s'agit de la racine carrée de la variance.

→ Fonction de répartition



Monotone, croissante.

Fonction cumulative du fait que l'on somme tous les pi des xi survenus **AVANT** x.

Les discontinuités se produisent pour les valeurs de x possédant des probabilités non nulles. Pour chacune de ces valeurs de x, la hauteur d'une discontinuité est la probabilité de X=x.

$$\lim_{-\infty} F(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{+\infty} F(x) = 1$$

VARIABLES ALEATOIRES CONTINUES

→ Densité de probabilité

f continue, positive et $\int_{I=[a;b]} f(x)\,dx = 1$.

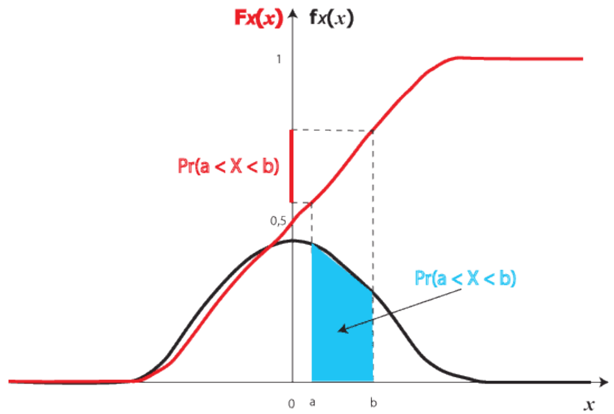
$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad P(X=a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X < b) \qquad P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a)$$

$$\mu = E(x) = \int_{I=[a;b]} x f(x)\,dx$$

$$\sigma^2 = \int_I (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \int_I x^2 f(x)\,dx - \mu^2$$

→ Fonction de répartition



Monotone, croissante, continue.

$$F(X) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Lois de distribution de probabilité d'une variable

APPROXIMATIONS					
→ **Loi Binomiale – Loi de Poisson**		→ **Loi Binomiale – Loi Normale**		→ **Loi de Poisson – Loi Normale**	
$n>50$ $p\leqslant 0{,}1$ $np<5$	$B(n;p)\rightarrow P(\lambda=np)$	$np\geqslant 5$ $n(1-p)\geqslant 5$	$B(n;p)\rightarrow N(np;\sqrt{npq})$ *avec q = 1 – p*	λ > 25	$P(\lambda)\rightarrow N(\lambda;\sqrt{\lambda})$