PACES Tut' rentrée 2013-2014

Démonstrations Élémentaires

Ndlr : Les démonstrations sont là pour aider ceux qui cherchent à comprendre d'où vient une formule, mais il n'est pas nécessaire de les connaître pour le concours. Ce qui est important, c'est de **comprendre avant d'apprendre !**

I. Mouvement circulaire uniforme

A. Le rayon de la trajectoire

$$\|OM\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\left(r\cos(\omega t)\right)^2 + \left(r\sin(\omega t)\right)^2}$$
$$= \sqrt{r^2\cos^2(\omega t) + r^2\sin^2(\omega t)}$$
$$= \sqrt{r^2\left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right)}$$
$$= \sqrt{r^2}$$
$$= r$$

Rappel trigonométrique :

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

B. La vitesse angulaire

$$\mathrm{v} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\left(-\omega r\sin(\omega t)\right)^2 + \left(\omega r\cos(\omega t)\right)^2}$$
$$= \sqrt{\omega^2 r^2\sin^2(\omega t) + \omega^2 r^2\cos^2(\omega t)}$$
$$= \sqrt{\omega^2 r^2\left(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right)}$$
$$= \sqrt{\omega^2 r^2}$$
$$= \omega r$$

C. L'accélération normale

$$\mathrm{a} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\left(-\omega^2 r\cos(\omega t)\right)^2 + \left(\omega^2 r\sin(\omega t)\right)^2}$$
$$= \sqrt{\omega^4 r^2\cos^2(\omega t) + \omega^4 r^2\sin^2(\omega t)}$$
$$= \sqrt{\omega^4 r^2\left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right)}$$
$$= \sqrt{\omega^4 r^2}$$
$$= \omega^2 r$$

II. Le tir balistique

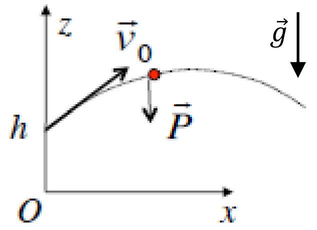
A. L'accélération

La seule force qui s'exerce est le poids, donc le bilan des forces vaut : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{g}$

D'après la 2ème loi de Newton : $m\vec{a} = m\vec{g} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \vec{g}$

Coordonnées de l'accélération : $a_t = \begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{vmatrix}$

Justification : On a un signe (-) car l'accélération va dans le sens opposé à celui de l'axe des z



B. La vitesse

On a déjà l'accélération. On rappelle que l'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps, donc pour trouver les coordonnées de la vitesse, il suffit d'intégrer les coordonnées de l'accélération par rapport au temps.

Coordonnées de la vitesse : $v_t = \begin{vmatrix} v_x = cste = v_{0x} \\ v_y = 0 \\ v_z = -gt + cste = -gt + v_{0z} \end{vmatrix}$

Rappel :

L'intégrale de 0 donne une constante

L'intégrale d'une constante $\boldsymbol{a}$ sera de la forme : $\boldsymbol{ax + b}$

$\boldsymbol{b}$ étant une constante

Ici les deux constantes correspondantes aux deux composantes de la vitesse initiale : la composante en fonction de l'axe des x et celle par rapport à l'axe des z.

La coordonnée n'étant pas prise en compte, elle reste nulle.

C. La position

On a l'accélération et la vitesse. On rappelle que la vitesse est la dérivé de la position par rapport au temps, donc pour trouver les coordonnées de la position, il suffit d'intégrer par rapport au temps les coordonnées de la vitesse :

Coordonnées de la position : $OM_t = \begin{vmatrix} x = v_{0x}t + cste = v_{0x}t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + h \end{vmatrix}$

Rappel :

L'intégrale d'une équation de type $\boldsymbol{ax + b}$ sera de la forme : $\boldsymbol{\frac{1}{2}ax^2 + bt + c}$

$\boldsymbol{c}$ étant une constante

La plupart du temps, on considèrera l'objet lancé à $x = 0$, donc la constante vaut 0.

Pour l'axe des z, la constante correspond à la hauteur initiale de l'objet.

Cette équation peut-être pratique lorsque l'on a une <u>donnée de temps</u> dans l'énoncé ou une <u>hauteur initiale</u>.

Les coordonnées, jusqu'à présent, dépendent du temps. Pour avoir une idée plus globale de la trajectoire, on peut éliminer la variable t. Pour cela on va résoudre un système :

$$\begin{cases} x = v_{0x}t \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x}{v_{0x}} \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + h \end{cases}$$

On remplace dans l'expression de z toutes les variables t par $\frac{x}{v_{0x}}$, on aura ainsi une équation indépendante du temps :

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{v_{0x}} \\ z = -g\dfrac{x^2}{2{v_{0x}}^2} + \dfrac{v_{0z}}{v_{0x}}x + h \end{cases}$$

Souvent, on aura la vitesse initiale globale de l'objet et non sa vitesse initiale en fonction de l'axe des x et l'axe des z

On va donc chercher à exprimer les deux composantes en fonction de la vitesse initiale globale :

$$v_{0x} = v_0 \cos(\theta)$$

$$v_{0z} = v_0 \sin(\theta)$$

En le réinjectant dans l'équation, on a l'expression de la trajectoire en fonction de la vitesse initiale globale, et de l'angle avec lequel l'objet a été tiré :

$$z = -g\frac{x^2}{2{v_0}^2 cos^2(\theta)} + \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}x + h$$

En prenant z et un h nul (donc un objet lancé sans hauteur initiale), on a :

$$0 = -g\frac{x^2}{2{v_0}^2 cos^2(\theta)} + \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}x$$

On peut ensuite donner l'expression de x :

$$g\frac{x}{2{v_0}^2 cos^2(\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \iff x = \frac{\sin(\theta)2{v_0}^2 cos^2(\theta)}{g cos(\theta)}$$

$$\iff x = \frac{{v_0}^2 \sin(2\theta).\cos(\theta)}{g cos(\theta)}$$

$$\iff x = \frac{{v_0}^2 \sin(2\theta)}{g}$$

Rappel trigonométrique :

$\boldsymbol{2.sin(\theta).cos(\theta) = sin(2\theta)}$

Cette équation est pratique pour le calcul de portée ou de la vitesse initiale d'un objet, lors d'un tir balistique sans hauteur initiale.

III. le condensateur

A. Expression de la capacité

On sait que la charge totale Q est exprimée en fonction de la capacité du condensateur, et de la différence de potentiel entre les deux plaques : $Q = C.V$

On en déduit une première expression de la capacité : $C = \frac{Q}{V}$

La différence de potentiel entre les deux plaques du condensateur (= tension) peut s'exprimer :

$$V = E.d$$

On en déduit une nouvelle expression de la capacité en fonction du champ électrique entre les deux plaques :

$$C = \frac{Q}{E.d}$$

Rappel :

E : représente le champ électrique

d représente la distance entre les deux plaques

ε_0 : la permittivité du vide

Le champ électrique produit entre deux plaques chargées, de signe opposé, de densité σ vaut : $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Application :

On peut demander comment varie tel ou tel paramètre en fonction d'un autre

Ex. : La capacité diminue avec le champ électrique (Vrai)

En réinjectant dans l'équation précédente on obtient : $C = \frac{Q.\varepsilon_0}{\sigma.d}$

Enfin, la densité de charge, par définition, s'exprime : $\sigma = \frac{Q}{S}$

On en déduit ainsi une équation de la capacité en fonction de la surface des plaques et de la distance entre elles : $C = S\frac{\varepsilon_0}{d}$

B. Utilisation d'un matériau diélectrique

L'utilisation d'un matériau diélectrique va influencer plusieurs paramètres du condensateur, notamment :

- ✓ L'énergie emmagasinée (W)
- ✓ La capacité (C)
- ✓ La différence de potentiel (V)

On rappelle que la constante diélectrique, ou permittivité relative du matériau est défini par :

$$\varepsilon_r = \frac{C'}{C}$$

Pour la capacité :

On en déduit l'expression de la capacité, après utilisation d'un matériau diélectrique : $C' = \varepsilon_r . C$
On voit que la capacité augmente.

Pour la différence de potentiel :

La différence de potentiel peut s'exprimer : $V = \frac{Q}{C}$

Donc la différence de potentiel après utilisation d'un matériau diélectrique s'exprime : $V' = \frac{Q}{C\prime}$

On retrouve ainsi : $V.C = V'.C'$ d'où : $V' = \frac{V.C}{C\prime} = \frac{V}{\varepsilon_r}$

On voit que la différence de potentiel diminue.

Pour l'énergie emmagasinée :

L'énergie emmagasinée par le condensateur s'exprime : $W = \frac{1}{2}C.V^2$

L'énergie emmagasinée du condensateur après utilisation d'un matériau diélectrique vaut :

$$W' = \frac{1}{2}C'.V'^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_r C.\frac{V^2}{{\varepsilon_r}^2} = \frac{1}{2}C.\frac{V^2}{\varepsilon_r} = \frac{W}{\varepsilon_r}$$

Donc l'énergie emmagasinée diminue.