Variables aléatoires, Lois de probabilités discrètes

I. DEFINITION

Une variable aléatoire est une **épreuve** aboutissant à des résultats aléatoires : les évènements élémentaires qui sont des nombres.

Ex 1: On lance un dé (= épreuve) et on lit le chiffre obtenu (=évènement élémentaire). Ici, on parle bien de variable aléatoire car le résultat est un nombre.

Ex 2 : On tire au sort un étudiant en médecine (= épreuve) et on lui demande sa mention au bac (= évènement élémentaire). Attention, on ne parle pas de variable aléatoire car la mention n'est pas un nombre.

Il existe 2 types de variables aléatoires :

Discrètes	Continues (=à densité)
Les résultats de l'expérience ont leur valeur dans un ensemble FINI ou INFINI DENOMBRABLE	Les résultats de l'expérience ont leur valeur dans un ensemble INDENOMBRABLE

II. VARIABLE ALEATOIRE DISCRETE

1. Loi de probabilités dscrètes

Soit « X » une variable aléatoire discrète sur un ensemble fondamental « Ω » à valeurs finies : X(Ω) = {x1,x2,...,xn,...}.

La Variable aléatoire « X » discrète obéit à une loi de probabilité.
Cette loi est définie par l'ensemble des probabilités pn (p1, p2, p3,..., pn) et de ses différentes éventualités xn (x1, x2, x3,..., xn). Ainsi, à chaque x_i on associe une probabilité de survenue p_i.

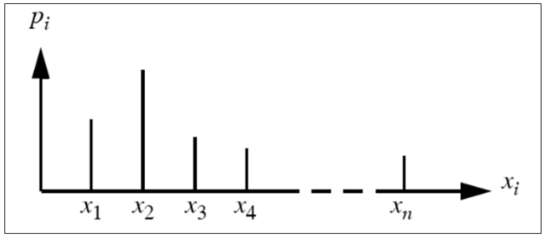
$$p_i = P(X = x_i)$$

$0 \leq p_i \leq 1$ et **$\sum (p_i) = 1$**

2. Représentation

On peut représenter les variables aléatoires discrètes sous forme de tableau ou de diagramme en bâton :

x_1	x_2	...	x_n	...
p_1	p_2	...	p_n	...



3. Paramètres

a) Moyenne

A chaque v-a, on associe une moyenne **μ** qui est la valeur moyenne des résultats de l'épreuve.

$$\mu = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n = \sum (x_ip_i)$$

b) Espérance

L'espérance mathématique correspond à la moyenne dans le domaine des «statistiques».
Elle est notée **E(X)**.

Elle traduit la tendance centrale de la variable aléatoire et il s'agit d'un indicateur de **POSITION** sur la distribution de probabilité de X.

$$E(X) = \mu = \sum (x_ip_i)$$

Théorèmes de l'espérance

- Soit X une variable aléatoire et k un nombre réel
  $E(X+k) = E(X) + k$
  $E(kX) = k\,E(X)$
- Soient X et Y deux variables aléatoires
  $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- Cette expression se généralise à n variables aléatoires : l'espérance de la somme est la somme des espérances
  $E(\sum X_i) = \sum E(X_i)$

c) Variance et écart type

La variance est un indicateur de **DISPERSION** qui caractérise l'éloignement des valeurs prises par la v-a par rapport à la moyenne.
Une très faible variance signifie que toutes les valeurs de la variable sont proches de la moyenne (= moyenne représentative)

On note la variance σ^2 ou **Var(X)**, et l'écart type σ est **racine carrée de la variance**

$$\sigma^2 = \sum pi * (xi - \mu)^2$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E((X-\mu)^2) = E(X^2) - \mu^2$$

Pour *a* une constante, on montre que :
$Var(X + a) = Var(X)$
$Var(aX) = a^2\, Var(X)$

4. Variable centrée réduite

Centrée : consiste à soustraire la moyenne μ de la variable à chacune de ses valeurs initiales
Réduite : consiste à diviser toutes les valeurs que prend la variable par son écart-type « σ »

Soit **X**, variable aléatoire de moyenne μ et d'écart type σ. On définit la variable centrée réduite **Y** :

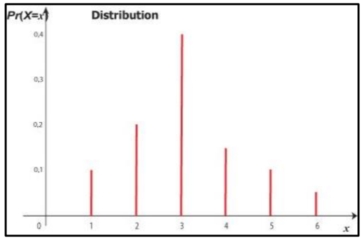
$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Elle a 2 propriétés : **E(Y) = 0** et **Var (Y) = 1**

Nota : L'intérêt de transformer les variables en « variables centrées réduites », notamment dans le cadre de la loi Normale, est d'obtenir des données indépendantes des unités (= sans dimensions) et des variables ayant une moyenne (μ = 0) et une dispersion (σ = 1) identique.

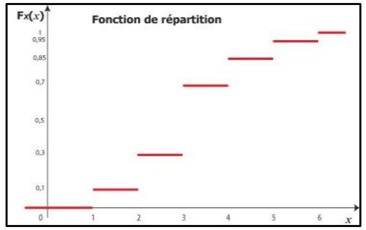
De cette façon, il est possible d'utiliser une seule table de probabilité (table de la loi Normale centrée réduite) pour déterminer la probabilité de n'importe quelles variables !

5. Fonctions de répartition et de distribution



La fonction de distribution est modélisée par un diagramme en bâtons, elle permet de voir la distribution des probabilités d'une variable aléatoire finie (discrète).

La fonction de répartition est une fonction **monotone croissante** : si a ≤ b alors F(a) ≤ F(b). On la représente par **une fonction en escalier discontinue**.
Il s'agit d'une fonction **cumulative** car elle somme toutes les probabilités pi correspondant aux xi survenus avant x.



III. LOIS DE PROBABILITES DISCRETES

1. Loi de Bernoulli : B(p)

Une épreuve de Bernoulli est une **épreuve unique** dont l'issue est soit « succès » soit « échec ».

➢ **Paramètres**

X : v-a donnant le **nombre de succès au cours de l'épreuve**
p : la probabilité du succès
q = 1-p : la probabilité de l'échec

➢ **Formules**

Soit la v-a X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p et **k** un réel égal à 1 en cas de succès ou 0 en cas d'échec.
P(X=1) = p   et   P(X=0) = q

$$P(X = k) = p^k(1 - p)^{1-k}$$

$$\mu = p$$

$$\sigma^2 = p\,(1\text{-}p) = pq$$

➢ ***Exemple :***

On lance un dé et on regarde si on obtient l'évènement attendu : « avoir un 6 ».
P(X=1) = 1/6 et P(X=0) = 5/6

2. Loi Binomiale : B(n;p)

C'est une épreuve répétée de Bernouilli. On réalise n essais **indépendants** d'une même expérience aléatoire ayant pour issue soit un « succès », soit un « échec ».

➢ **Paramètres**

n : le nombre d'essais indépendants
p : probabilité d'un succès
X : v-a donnant le **nombre de succès à l'issue des n essais**

➢ **Formules**

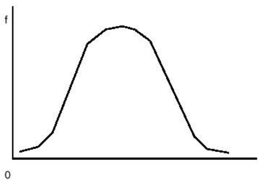
Soit X la v-a qui suit une loi binomiale de paramètre n et p, avec **k** étant un nombre réel.

$$P(X=k) = C^k_n p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mu = np$$
$$\sigma^2 = np(1-p) = npq$$

➢ **Propriétés**

- Pour p = 0,5 la forme du diagramme des probabilités d'une distribution normale est symétrique
- Si p > 0,5 on dit que la distribution est « asymétrique positive »
- Si p < 0,5 elle est « asymétrique négative ».
- Quand n est grand, la forme du diagramme de distribution devient symétrique



➢ ***Exemple :***

*On lance un dé 3 fois avec comme objectif « obtenir un 6 » (=succès). Chaque lancer de dé est **indépendant** du lancer précédent.*

Soit X ~ B (3 ; 1/6)

La probabilité d'obtenir deux succès est :

$$P(X=2) = c_3^2 * \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-2}$$

$$P(X=2) = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} * \frac{1}{36} * \frac{5}{6}$$

$$P(X=2) = 3 * \frac{1}{36} * \frac{5}{6}$$

$$P(X=2) = 0{,}007$$

➢ **Particularité**

- Soit $X1 \sim B(n1;p)$ et $X2 \sim B(n2\,;p)$
  Alors $\boldsymbol{X1 + X2 \sim B(n1+n2\,;p)}$

Ce résultat peut être généralisé pour la somme d'un nombre fini de v-a binomiales indépendantes et de même paramètre p.

- **Le tirage au sort**

Pour étudier la totalité d'une population on procède à un échantillonnage de celle-ci. De ce fait, grâce à un tirage au sort (=randomisation), on constitue plusieurs échantillons de la population auxquels on appliquera notre loi binomiale.

Le TAS peut être :

- **Non exhaustif** (=indépendant) : Les éléments sélectionnés sont remis dans l'échantillon après le tirage. → **p reste constant**
- **Exhaustif** (=dépendant des autres tirages) : il n'y a pas de remise → **p varie** au fils des tirages

On définit donc le taux de sondage = **n/N**
Avec n la taille de l'échantillon et N la taille de la population

Si n/N ≤ 0,10 on applique la loi binomiale
(même si le tirage est exhaustif)
Si n/N > 0,10 on applique la loi hypergéométrique

3. Loi Hypergéométrique : H(N,D,n)

Soit une population de N individus parmi lesquels D ont un caractère donné. On prélève un échantillon n de cette population N. Les individus de l'échantillon sont tirés simultanément (l'ordre de tirage n'a pas de sens) et **sans remise**.

- **Paramètres**

X : la v-a donnant le **nombre d'individus possédant le caractère donné dans l'échantillon de n individus.**
N : effectif de la population
D : nombre de personnes présentant le caractère étudié dans la population
D/N : probabilité p d'avoir le caractère étudié dans la population
P(X=k) : **probabilité d'obtenir k individus présentant le caractère dans un échantillon de n individus**

- **Formules**

Soit X ~ H(N ;D ;n), et **k** un nombre réel :

$$P(X = k) = \frac{C_D^k * C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

$$\mu = \frac{nD}{N} = np$$

$$\sigma^2 = \frac{nD}{N} * \frac{N-D}{N} * \frac{N-n}{N-1} = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) npq$$

- **Utilisation de la loi**

« La loi hypergéométrique permet la conception de **plans d'échantillonnages** pour le contrôle de réception »

- ***Exemple***

Dans une population de 1000 habitants, 150 possèdent les yeux vairons. On tire au sort 200 individus dans cette population. Quelle est la probabilité que la moitié de cet échantillon ait les yeux vairons ?

P(X=100) = $\frac{C_{150}^{100} * C_{1000-150}^{200-100}}{C_{1000}^{200}}$ *(on ne vous demandera jamais de développer)*

4. Loi Géométrique : G(p)

On répète des épreuves de Bernoulli **jusqu'à l'obtention du premier succès**. On comptabilise le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ce premier succès.

- **Paramètres**

p : probabilité d'avoir un succès
q : probabilité d'avoir un échec
X : v-a donnant le **nombre d'essais nécessaires jusqu'à l'obtention du premier succès**

- **Formules**

Soit X ~ G(p), et **k** un nombre réel

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1}$$

$$\mu = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

- **Utilisation de la loi**

« On utilise la loi géométrique pour étudier l'efficacité d'une **carte de contrôle** dans un dispositif de surveillance d'un processus de production »

- ***Exemple***

On lance un dé à six faces jusqu'à obtenir un « 6 ». La probabilité d'obtenir un 6 au bout de 3 essais est :
P(X=3) = 1/6 x (5/6)² = 25 / 216

5. Loi de Poisson : P(λ)

Elle est utilisée le plus souvent pour déterminer la probabilité qu'un certain nombre d'événements interviennent sur la base d'une unité de temps (ou d'autres unités : volume, surface, etc…).

➢ **Paramètres**

λ : taux moyen avec lequel un évènement particulier se produit en général
X : v-a qui donne le **nombre d'évènement particulier qui se produisent dans la situation étudiée**

➢ **Formules**

Soit X ~ P(λ) et **k** un nombre réel :

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$\mu=\sigma^2=\lambda$$

La moyenne et la variance sont égales à λ : cette égalité est une propriété mathématique qui permet d'indiquer le caractère poissonien d'une variable discrète → lorsque μ et σ^2 d'une variable sont égales à une même « valeur », alors cette variable suit la loi de Poisson et la « valeur » en question est notée λ.

➢ **Propriétés**

Soit $X_1 \sim P(\lambda_1)$ et $X_2 \sim P(\lambda_2)$
Alors $X1+X2 \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

➢ **Utilisation**

La loi de Poisson est utilisée le plus souvent pour déterminer le **nombre de défauts** (ou évènements) par unité (de temps, volume, surface…etc) dans le cadre de la **qualité**, la **fiabilité** et la **sécurité**.

➢ ***Exemple***

Dans le service des urgences, on a en moyenne 4 hospitalisations en deux heures. Quelle est la probabilité d'avoir 1 patient hospitalisé au cours d'une heure ?

λ= 4 hospitalisations / 2h = 2 hospitalisations / 1h = 2

P(X=1hospitalisation / 1h) = $\frac{2^1e^{-2}}{1!}=2e^{-2}$

Explications pour votre compréhension

« La loi hypergéométrique permet la **conception de plans d'échantillonnages pour le contrôle de réception** »

Le contrôle de réception s'applique à un lot complet d'objets (=un lot de téléphones par exemple). Il permet de décider de l'acceptation ou du rejet du lot (=on garde le lot de téléphones ou on le rejette). Le contrôle de qualité permet aussi d'avoir une appréciation sur la qualité du lot (=qualité du lot de téléphones).

Pour effectuer ce contrôle, on a besoin d'élaborer des « plans d'échantillonnages » (=on va effectuer le contrôle sur un échantillon de téléphones du lot).

Ainsi la loi hypergéométrique permet de réaliser ce « plan d'échantillonnage » pour le contrôle de réception.

« On utilise la loi géométrique pour **étudier l'efficacité d'une carte de contrôle dans un dispositif de surveillance d'un processus de production** »

Dans certains domaines, on a un processus de production (=machine/appareil de production de téléphones par exemple). Le processus de production permet de produire, à la chaine, des objets de même nature. Mais il peut arriver qu'un dysfonctionnement du processus survienne, entraînant ainsi la production d'objets non conformes (=les téléphones produits ne marchent pas).

Pour pouvoir corriger, au plus vite, ce genre de problème, on observe la mise en place de dispositif de surveillance comme « une carte de contrôle ».
La carte de contrôle (ou diagramme de contrôle) permet d'évaluer la qualité de chaque objet produit. Ainsi dès qu'un problème survient, on peut le repérer grâce à notre carte.

La loi géométrique permet ainsi d'étudier l'efficacité d'une carte de contrôle. On observe bien l'analogie entre la loi et la carte de contrôle : elle permet de repérer le premier évènement anormal qui survient.

IV. VARIABLES ALEATOIRES CONTINUES

1. Densité de probabilité

➢ Variables aléatoires continues :

Définition :

Une variable aléatoire continue à une probabilité nulle d'être égale à un nombre donné.

→On note : $P(a \leq X \leq b)$ ou $P(X \in [a,b])$

Exemple : *La probabilité qu'un PACES mesure 1,60000…0…. mètres est nulle mais la probabilité qu'un PACES mesure entre 1,59m et 1.61 est non nulle. La probabilité qu'un PACES mesure plus de 1,60m est non nulle aussi.*

Remarque : On ne peut donc pas lister l'ensemble des probabilités de toutes les éventualités d'une loi de probabilité d'une variable aléatoire car chacune est nulle.

➢ Densité de probabilité :

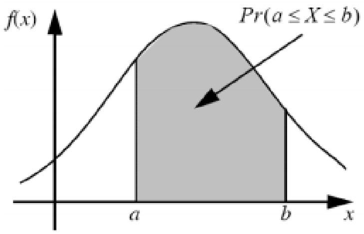
Définition :

Une densité de probabilité est une fonction utilisée pour définir la loi de probabilité de X (=distribution de X).

→On note : ***f(x)***

Représentation :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$



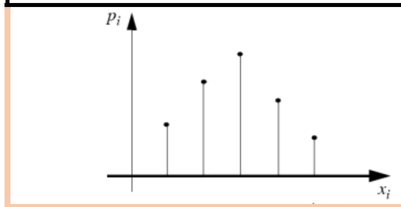
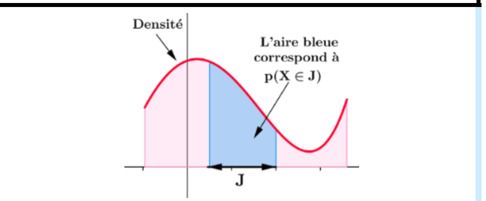
Rappels :

- $\int_a^b f(x)dx$ = intégrale de *f(x)* sur [a ; b] = aire sous la courbe de la fonction sur [a; b] (*zone grise*)
- F(x) est la primitive de f(x) ainsi $F(b) - F(a)$ ≈aire sous la courbe

La probabilité P(a≤X≤b) est l'aire sous la courbe.
(ici la zone grise)

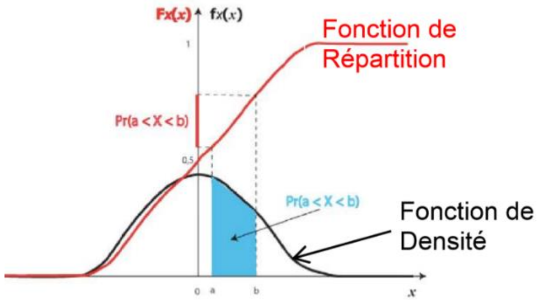
- **Du discret au continu :**

Rappel : *La variance*
$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{i=n} pi(xi - \mu)^2$

DISCRETE	CONTINUE
	
Sommes $\sum$	Intégrales $\int$
p_i	*f(x)dx*
$P(x_k \leq X \leq x_n) = \sum_{i=k}^{i=n} p_i$	$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$
Propriétés	
$p_i \geq 0$	$f(x) \geq 0$
$\mu = E(x) = \sum_i xipi$	$\int_R f(x)dx = 1$
$\sigma^2 = Var(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i$	$\sigma^2 = var(X) = \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 f(x)dx$
$\sigma^2 = Var(X) = \sum_i x^2 p_i - \mu^2$	$\sigma^2 = var(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx - \mu^2$

2. Fonction de répartition: F(x)

Propriétés :



- Fonction **monotone croissante** et **continue**
- Quand x est à -∞ il vaut 0 (*la courbe rouge est à 0 tout à gauche*)
- Quand x est à +∞ il vaut 1 (*la courbe rouge est à 1 tout à droite*)
- **F(x) = P(X≤ x)=** $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ (*F(x) est une primitive de la densité*)
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ = différence de hauteur sur l'axe des ordonnées de la fonction de répartition

V. LOIS DE PROBABILITES CONTINUES

1. Loi Exponentielle : E(λ)

➢ **Paramètres :**

λ : Taux de défaillance instantanée

➢ **Utilisation :**

Pour décrire un processus de **mortalité/défaillance** lors duquel le risque instantané de mort/taux de défaillance est **constant**.

Remarques :

- La **durée de vie au-delà d'un instant t est indépendante de l'instant t** : *La probabilité qu'un téléphone ne soit pas cassé au bout de 2 ans est indépendant du fait qu'il fonctionne depuis 2 ans*
- **P(X≤x)** = probabilité qu'un événement X survienne avant l'instant t=x

➢ **Formules :**

Fonction de densité :

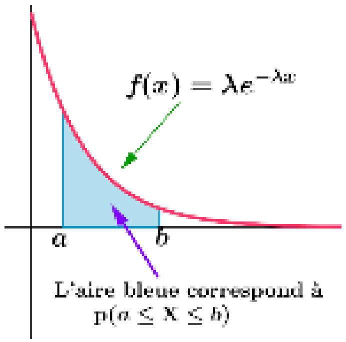
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{avec } \lambda>0 \text{ et } x\geq 0$$

Fonction de répartition :

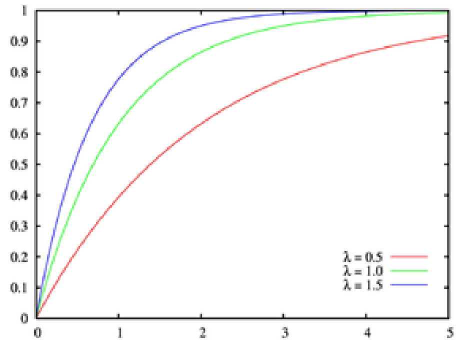
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

➢ **Représentation :**



Fonction de densité :
L'intersection de *f(x)* avec l'axe des ordonnées est *f*(0)=λ.



Fonction de répartition :
On voit bien que F(x) part de 0 pour atteindre 1.

➢ **Lien avec la Loi de Poisson :**

Si un événement suit une loi de Poisson de paramètre λ alors le temps qui s'écoule entre deux réalisations consécutives est $\frac{1}{\lambda}$ car distribué selon une loi exponentielle.

➢ ***Exemple :***

a) *La **durée de vie d'un aspirateur** peut être décrite ainsi et à chaque instant le taux de défaillance (la probabilité qu'il tombe en panne) est constant. C'est-à-dire que peu importe le temps écoulé ou le nombre d'aspirateur déjà cassés la probabilité que mon aspirateur tombe en panne reste la même pour un instant donné.*
b) *La **radioactivité** peut être décrite ainsi et à chaque instant le taux de radioactivité (la probabilité de désintégration) est constant. C'est-à-dire que peu importe le temps écoulé ou le nombre d'atome déjà désintégrés la probabilité que le noyau se désintègre reste la même pour un instant donné.*

2. Loi Uniforme : U([a ; b])

➢ Paramètres

[a ; b] ϵ R : l'intervalle appartient à l'ensemble des réels (R).

➢ Utilisation

La loi uniforme est en fait **constante** c'est-à-dire que peu importe x la probabilité est toujours la même.

Remarque :

- Sur l'intervalle [a ; b] la loi uniforme est constante
- En dehors de l'intervalle elle est nulle.

➢ Formules :

Fonction de densité :

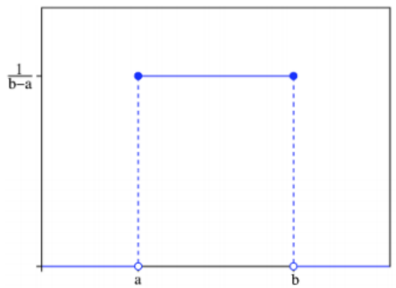
- $f(x) = \frac{1}{b-a}$ si $x \in [a\,;b]$
- $f(x)=0$ si $x \notin [a\,;b]$

Fonction de répartition :

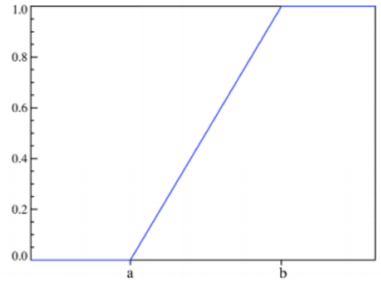
- $F(x) = P(X \leq x) = \int_a^x \frac{1}{(b-a)}dx = \frac{x-a}{(b-a)}$
- $P(x \leq X \leq y) = \int_x^y \frac{1}{(b-a)}dx = \frac{y-x}{(b-a)}$

$$\mu = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

➢ Représentation :



Fonction de densité :
f(x) est donc constante sur [a ; b] et nulle en dehors.



Fonction de répartition :
F(x) part de 0 pour atteindre 1 de manière linéaire.

➢ *Exemple :*

Le Professeur Staccini arrive toujours en avance pour ses cours. L'amphi ouvre le matin à 7 :30 et le cours doit commencer à 8 :00. On peut définir la probabilité de l'événement « arrivée du professeur Staccini » par une loi uniforme sur [7 :30 ; 8 :00]. Ainsi la probabilité que le professeur arrive au moins un quart d'heure en avance est $P(X \leq 7{,}75) = \int_{7{,}5}^{8} \frac{1}{(8-7{,}5)}dx = \int_{7{,}5}^{8} \frac{1}{0.5}dx = \frac{7.75-7.5}{(8-7.5)} = \frac{0.25}{0.5} = 0{,}5$. *Il y a donc 50% de chance que le Pr Staccini arrive au moins un quart d'heure en avance (soit avant 7 :45 ce qui dans un système décimal où 1h=60min=1 soit 30mn=0,5 soit 7 :45h=7.75).*

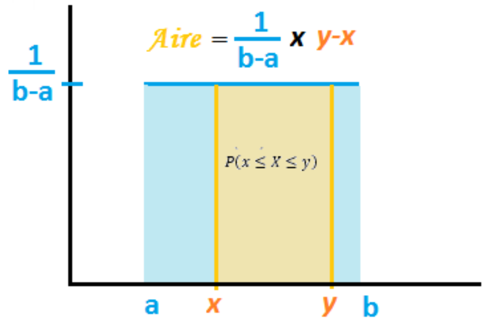
Explications pour votre compréhension

- La probabilité est donnée par l'aire sous la courbe de densité qui ici est un rectangle. La totalité de l'aire doit donner 1. Sa largeur est [a ; b]=b-a. Soit A son aire :

A= x x (b-a) = 1 ⇔ $x = \frac{1}{(b-a)}$.

Sa hauteur est donc $\frac{1}{(b-a)}$

- $P(x \leq X \leq y)=\frac{y-x}{(b-a)}$



3. Loi Normale : N(μ ;σ)

➢ **Paramètres :**

μ : La moyenne de X
σ : L'écart-type de X
X : Variable aléatoire

➢ **Utilisation :**

La loi Normale sert TOUT le temps (c'est la vie les gars !). Elle décrit la **répartition naturelle de phénomènes**, biologiques par exemples.

➢ **Formules :**

Fonction de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \; si \; x \in [-\infty \, ; +\infty]$$

Fonction de répartition : (à connaître par cœur ++)

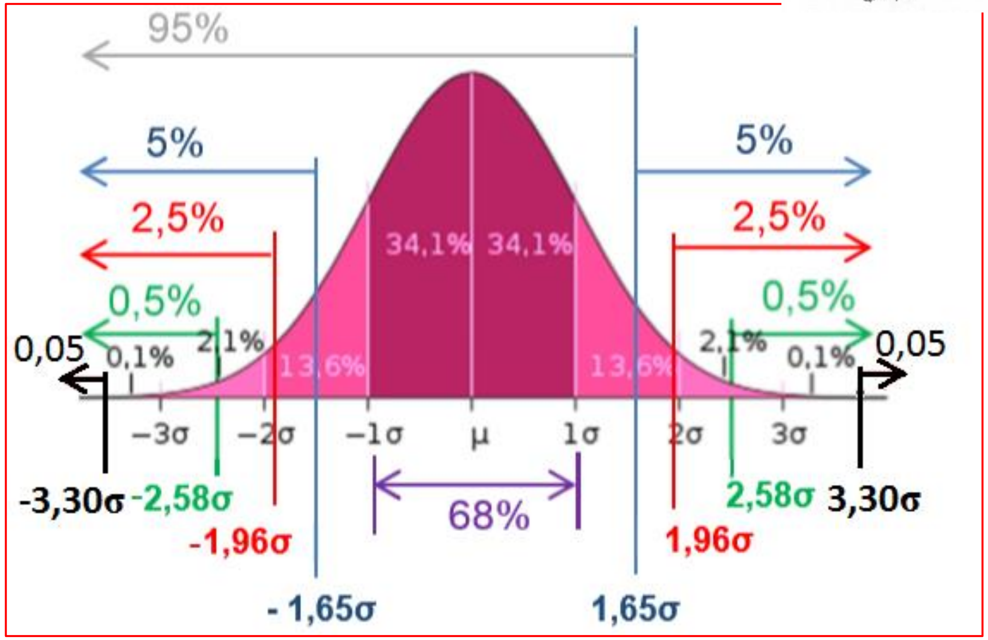
P (X < μ - **1,65**σ ou X > μ + **1,65**σ) = **10%**
P (X < μ - **1,96**σ ou X > μ + **1,96**σ) = **5%** +++
P (X < μ - **2,58**σ ou X > μ + **2,58**σ) = **1%**
P (X < μ - **3,30**σ ou X > μ + **3,30**σ) = **0,1%**
P (μ - **1**σ < X < μ + **1**σ) = **68%**

➢ ***Exemple :***

Le poids des PACES se répartit selon une loi Normale N(μ ;σ) avec μ=60Kg et σ=10Kg. Ainsi 95% des PACES pèsent entre μ-1,96 σ= 60- 1,96x10 = 60-19.6=**40,4** et μ+1,96 σ= 60+ 1,96x10 = 60+19.6=**79,6**.

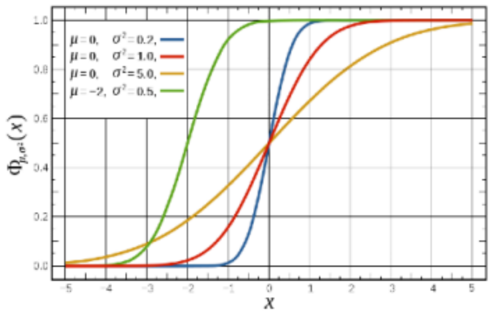
➢ **Représentation :**

1. Fonction de densité



C'est une courbe en cloche appelée **courbe de Gauss**. On a représenté ici les différents découpage en intervalle des valeurs limites a connaitre. *(On lit : il y a 10 chances sur 100 pour que X<μ-1,65σ ou X>μ-1,65, soit 5% du côté gauche et 5% du côté droit).*

2. Fonction de répartition



Ici toutes les courbes [sauf la verte] ont la même moyenne (notée X sur le graph). Ainsi le point d'intersection de toutes ces courbes a pour coordonnées (0 ; 0,5). Donc 50% est atteint au niveau de X.

4. Loi Normale centrée réduite : N(μ ;σ)= N(0 ;1)

➢ **Paramètres**

μ=0 : La moyenne de X, *elle est donc centrée sur 0*

σ=1 : L'écart-type de X, *elle est donc réduite*

Z : Variable aléatoire

➢ **Passage de la loi Normale à la loi Normale centré réduite : changement de variable**

On a la variable aléatoire X qui suit une loi Normale N(μ ; σ). Soit **Z** une variable aléatoire qui suit une loi Normale centrée réduite **N(0 ; 1)**.

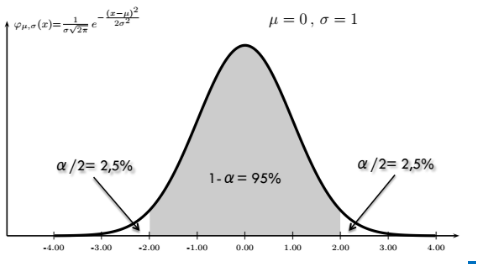
Ainsi $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

Remarque : on peut donc ramener tous les problèmes suivant une loi Normale à une distribution Normale centrée réduite !

➢ **Utilisation**

La loi Normale centrée réduite est juste un cas particulier de la loi Normale. Lorsque l'on a une variable aléatoire qui suit une loi Normale dont le comportement nous est inconnu on la ramène à une loi Normale centrée réduite dont le **comportement est connu**, on pourra donc utiliser la table de la loi Normale centrée réduite.

➢ **Représentation :**



Fonction de densité :
On a 95% de chance d'avoir un individu
$\in [\,\mu - 1{,}96\,\sigma\,;\mu - 1{,}96\,\sigma]$
$= [-1.96\,;\ +1{,}96]$
C'est-à-dire dans la zone grisée

➢ ***Exemple :***

Le poids des PACES se répartit selon une loi Normale N(μ ;σ) avec μ=60Kg et σ=10Kg.

Explications de la table de la loi normale centrée réduite

Elle permet de **trouver z** quand on connait le résultat de **P (Z ≤ z)** et elle donne les probabilités de Z pour $0 \le z \le \mathbf{3.99}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382

Sur la première ligne on lit la seconde décimale

On lit le chiffre des unités et la première décimale dans la colonne de gauche

Pour P(Z<1,24) on lit 1,2 dans la première colonne puis 0,04 sur la première ligne. On cherche l'intersection de la ligne et de la colonne. On trouve 0,8925.

VI. APPROXIMATIONS

Certaines lois peuvent être approximées par d'autres.

Loi Binomiale → Loi de Poisson		
Si n> 50 ; p≤0,10 et np≤ 5	**Alors** B(n ; p) → P(λ=np)	La loi Binomiale a ainsi été approximée par la loi de Poisson
Loi Binomiale → Loi Normale		
Si $np \geq 5$ et nq≥ 5	**Alors** B(n ; p) → N(np;$\sqrt{npq}$)	La loi Binomiale a ainsi été approximée par la loi Normale
Loi de Poisson → Loi Normale		
Si $\lambda > 25$	**Alors** P(λ) → N(λ;$\sqrt{\lambda}$)	La loi de Poisson a ainsi été approximée par la loi Normale