
# TUT ’ RENTRÉE : BIOSTATS’

## COURS N°2 : PROBABILITÉS ÉLÉMENTAIRES ET DÉNOMBREMENTS

# SOMMAIRE



# I. INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS, ENSEMBLES

## A/ Définitions

- ensemble = liste ou collection d'objets définis
- élément de l'ensemble = objet appartenant à l'ensemble

Un ensemble peut être défini en

- extension (=explicite) : on liste tous les éléments
- compréhension (=implicite) : on donne des propriétés caractérisant les éléments

<u>**ex :**</u> l'ensemble A = {a ; b ; c ; d ; e} est **explicite**
l'ensemble B = { x : x est une voyelle} est **implicite**

# A/ Définitions (2)

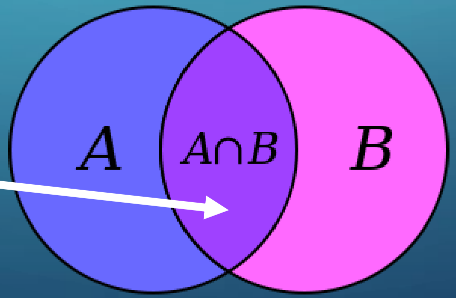
- p est un élément de l'ensemble A $\longrightarrow$ $p \in A$ (ex : 1 appartient à l'ensemble $A = \{1 ; 2 ; 3\}$)
- L'ensemble B est une partie de l'ensemble A $\longrightarrow$ $B \subset A$ (ex : $B = \{1 ; 2\}$ est une partie de $A = \{1 ; 2 ; 3\}$
- L'ensemble vide est $\emptyset$
- L'univers est $\Omega$

# B/ OPÉRATIONS

**L'intersection :**

- notée A ∩ B (avec A et B deux ensembles)
- signifie que l'élément appartient à A **ET** à B
- cas particulier : si A ∩ B = ∅, A et B sont dits « disjoints »

C'est ici !!

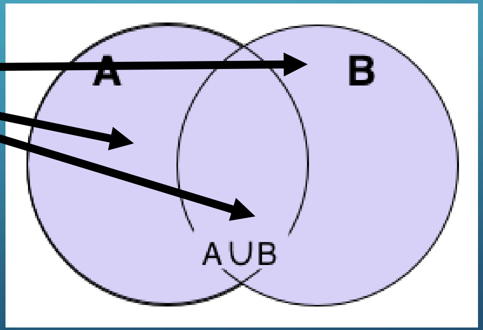


# B/ OPÉRATIONS

**La réunion :**

- notée A U B
- signifie que l'élément appartient à A, ou à B, ou **aux deux** !

C'est tout là !




# B/ OPÉRATIONS

**Le complémentaire :**

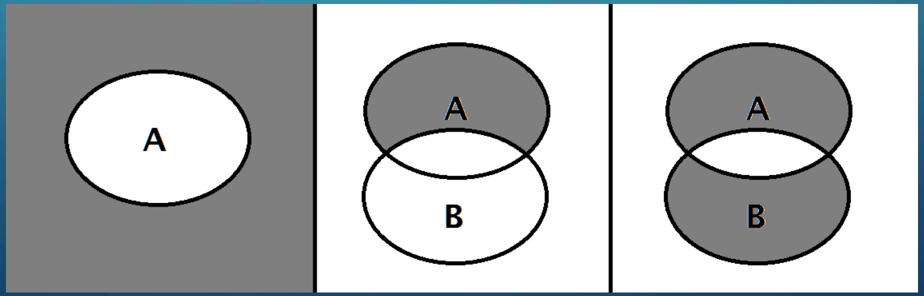
- noté $\complement A$ ou $\bar{A}$ ou $A^c$ , représente tout ce qui **n'appartient pas** à l'ensemble considéré

**La différence :**

- noté A-B, représente tout ce qui appartient à A, sans appartenir à B

**La différence symétrique :**

- noté A Δ B, représente ce qui appartient à A, **ou** à B, mais pas ce qui appartient à A **et** à B



# B/ OPÉRATIONS

Intéressant à connaître :

| | |
|---|---|
| $A \cup A = A$ | $A \cap A = A$ |
| $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |
| $A \cup B = B \cup A$ | $A \cap B = B \cap A$ |
| $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| $A \cup \varnothing = A$ | $A \cap \Omega = A$ |
| $A \cup \Omega = \Omega$ | $A \cap \varnothing = \varnothing$ |
| $A \cup \complement A = \Omega$ | $A \cap \complement A = \varnothing$ |
| $\complement \complement A = A$ | $\complement \Omega = \varnothing, \complement \varnothing = \Omega$ |
| $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ | $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ |

# C/ ENSEMBLES


⟶ différents types d'ensembles existent

- l'ensemble fini (ensemble nul ou contenant un nombre fini d'éléments)
- l'ensemble infini

  ↳ peut être dénombrable (chaque élément correspond à un entier naturel)

  ↳ peut être non dénombrable

<u>**ex :**</u> l'ensemble A = {n : n est un entier} est **dénombrable**
l'ensemble B = $\{n : n \in \mathbb{R}\}$ est **non dénombrable**

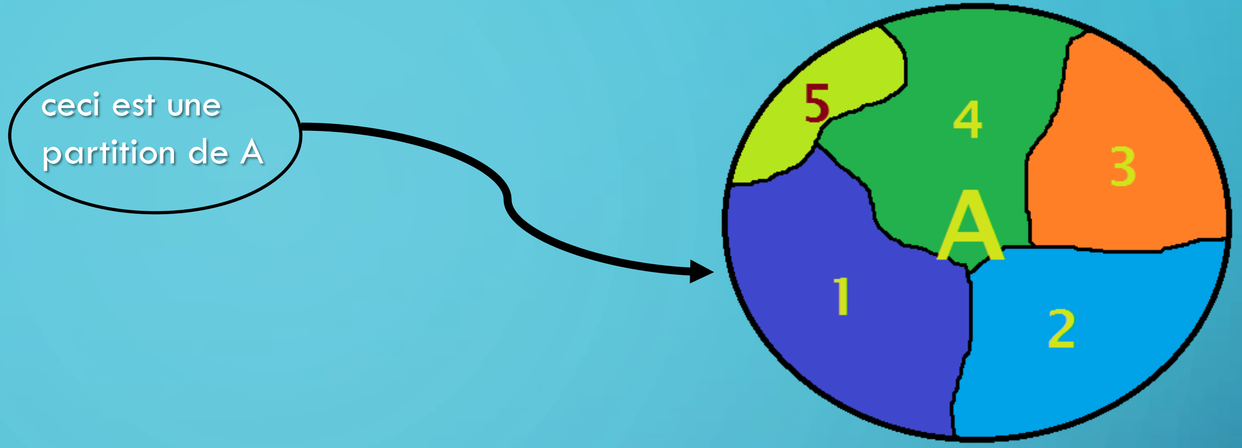
# C/ ENSEMBLES

**<u>Les ensembles produits :</u>**

- considérons deux ensembles, A et B …
- l'ensemble produit de A et B est l'ensemble des couples **<u>ordonnés</u>** (a ; b), avec a ∈ A et b ∈ B
- pour calculer le nombre de couples, on fait Card(A) * Card(B)

**<u>ex :</u>** si A : {rouge ; bleu} et B : {1 ; 2 ; 3}, alors l'ensemble produit de A et B est { (rouge ; 1),(rouge ; 2),(rouge ; 3),(bleu ; 1),(bleu ; 2),(bleu ; 3) }

# C/ ENSEMBLES




## Les familles d'ensembles :

- la famille des parties de A est l'ensemble de **tous** les sous-ensembles constituant A

  **ex :** A = {a ; b}, ici, la famille des parties de A est P(A) : {Ø,{a},{b},{a,b}}, c'est-à-dire toutes les « combinaisons » que l'on peut réaliser avec l'ensemble A

  **note :** un ensemble contenant $p$ éléments possède $2^p$ parties (ou « combinaisons »)

## La partition :

- c'est la division de A en sous-ensembles distincts, dont la réunion forme A

# PAUSE DE 2 MINUTES POUR SOUFFLER APRES CETTE INTRO

(si ya le temps)

# II. DÉNOMBREMENTS


- <u>**La p-liste avec remise**</u>
- <u>**L'arrangement de *n* éléments pris *p* à *p***</u>
- <u>**L'arrangement avec répétition**</u>
- <u>**La permutation d'un ensemble fini à *n* éléments**</u>
- <u>**La permutation avec répétition**</u>
- <u>**La combinaison de *n* éléments pris *p* à *p***</u>

(accrochez-vous bien là)

# LA P-LIST AVEC REMISE

- utilisée pour les tirages **ordonnés avec remise**
- « je tire une boule, je la regarde, je la repose et j'en tire une nouvelle »
- formule : **Card(E)$^p$** , avec Card(E) le nombre d'éléments de l'ensemble et p le nombre de tirages
- ex : j'ai les 26 lettres de l'alphabet (Card(E) = 26) et je veux savoir combien de mots de 3 lettres je peux former …

  ⟶ il y $26^3$ mots possibles (« aaa », « aab », « boa », « zyx » …)

# EXERCICE !!

Jean a un cadenas à combinaison avec six emplacements. Chaque emplacement peut contenir quatre symboles : le cœur, le pique, le carreau et le trèfle. Combien de combinaisons possède le cadenas de Jean ?


$$\mathbf{Card(E)^p}$$

# EXERCICE !!

Jean a un cadenas à combinaison avec six emplacements. Chaque emplacement peut contenir quatre symboles : le cœur, le pique, le carreau et le trèfle. Combien de combinaisons possède le cadenas de Jean ?

**RÉPONSE :**
$Card(E)^p = 4^6$

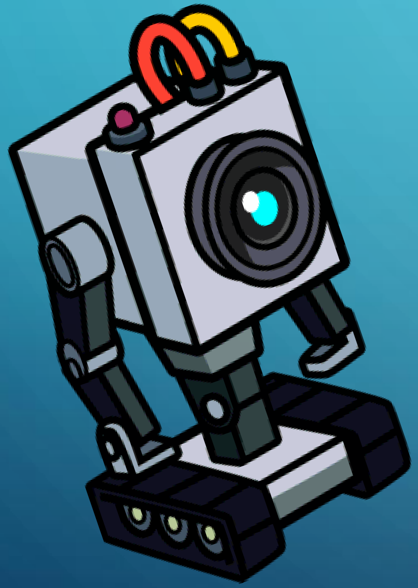
→ c'est comme si on faisait 6 tirages ($p = 6$) au sein d'un ensemble de 4 éléments ($Card(E) = 4$)

# L'ARRANGEMENT DE *N* ÉLÉMENTS PRIS *P* À *P*

- utilisé pour les tirages **ordonnés sans remise ( = tirages successifs)**
- « je tire une boule, je note le numéro, j'en reprends une autre », l'ordre compte !
- formule : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ , avec p le nombre d'objets tirés et n le nombre d'objets de l'ensemble.
- explication du « *n!* » : 3! , prononcé factoriel de 3, donne 3*2*1. **0! = 1 !!!**
- **ex :** j'ai les 26 lettres de l'alphabet (n = 26), et je veux savoir combien de mots de 3 lettres (p = 3) je peux former …
  (/!\ Chaque lettre est utilisable UNE FOIS (tirage sans remise) /!\)

# L'ARRANGEMENT DE *N* ÉLÉMENTS PRIS *P* À *P*

$$A_{26}^{3} = \frac{26!}{(26-3)!} = 26 * 25 * 24 = 15\,600$$



astuce de calcul !

# EXERCICE !!

Morty dispose de 26 cartes, contenant chacune une lettre de l'alphabet. Il se demande quelle est la probabilité de reconstituer son prénom en tirant au hasard et une à une les cartes, tout en conservant l'ordre du tirage. Pouvez-vous l'aider ? (il est nul en maths)

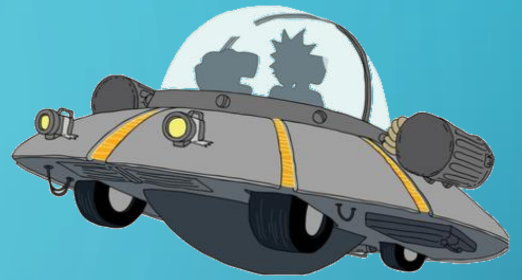
$$A_n^p = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p})!}$$

# EXERCICE !!

Morty dispose de 26 cartes, contenant chacune une lettre de l'alphabet. Il se demande quelle est la probabilité de reconstituer son prénom en tirant au hasard et une à une les cartes, tout en conservant l'ordre du tirage. Pouvez-vous l'aider ? (il est nul en maths)

RÉPONSE : le nombre d'arrangements possible est $\frac{26!}{(26-5)!} = 7\ 893\ 600$, une seule de ces combinaisons est « Morty ». La probabilité est donc de 1/7 893 600 !

# L'ARRANGEMENT AVEC RÉPÉTITION



- similaire à la p-liste avec remise : utilisé lors des tirages **ordonnés avec remise**
- si on tire x fois parmi n éléments, la formule est … $\mathbf{n^x}$
- **ex :** on tire dans un paquet de 52 cartes une carte, on la repose, on en tire une autre, il y a $52^2$ possibilités de tirages !
- ne vous prenez pas la tête, c'est la même chose que la p-liste avec remise

# LA PERMUTATION D'UN ENSEMBLE FINI À *N* ÉLÉMENTS

- utilisée pour les tirages **ordonnés sans remise**
- semblable à l'arrangement de *n* éléments pris *p* à *p*, mais lorsque p est égal à n (le nombre d'objets tirés est le même que le nombre d'objets total)
- c'est donc un tirage ordonné de **tous les éléments de l'ensemble**
- formule (assez compliquée à retenir) : **n!**
- **ex :** vous disposez de 5 cartes (O, R, A, N et G), vous vous demandez combien de mots de 5 lettres vous pouvez former …

$\longrightarrow$ $5! = 120$

# EXERCICE !!

À l'hôpital, 12 patients attendent aux urgences, mais ils n'arrivent pas à se décider pour choisir leur siège … Vous voulez les aider et décidez donc au passage, pour vous amuser, de calculer le nombre de possibilités de placement de ces patients ! (grosse ambiance)

Quel est le nombre de possibilités ?

# EXERCICE !!

À l'hôpital, 12 patients attendent aux urgences, mais ils n'arrivent pas à se décider pour choisir leur siège … Vous voulez les aider et décidez donc au passage, pour vous amuser, de calculer le nombre de possibilités de placement de ces patients ! (grosse ambiance)

Quel est le nombre de possibilités ?

**<u>RÉPONSE :</u>** 12! ( = 479 001 600 pour les curieux) tout simplement ☺

# LA PERMUTATION AVEC RÉPÉTITION

- utilisée pour lors des **<u>permutations d'un ensemble</u>**, lorsque plusieurs éléments de l'ensemble appartiennent à une même catégorie ($k_1$, $k_2$, $k_3$ … $k_x$), on ne prend en compte que la catégorie de l'objet.

- formule : $\frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k_1}!\boldsymbol{k_2}!\boldsymbol{k_3}!\ \ldots \boldsymbol{kx}!}$ avec *n* le nombre d'éléments total et *k* les nombres d'éléments par catégorie

- **<u>ex :</u>** une urne contient 5 boules rouges, 3 noires, 4 bleues et 2 vertes. Combien existe-il d'ordre de tirage en prenant en compte uniquement la couleur des boules ?

$$\longrightarrow \frac{\mathbf{14}!}{\mathbf{5}!*\mathbf{3}!*\mathbf{4}!*\mathbf{2}!}$$

# EXERCICE !!

Encore un jour aux urgences, avec cette fois-ci différents patients. Vous avez : 3 fracturés aux côtes, 6 diarrhéiques, 4 crânes fêlés et 2 AVC. Étant donné que vous êtes stagiaire et que vous n'avez pas grand-chose à faire, vous vous demandez combien d'ordres d'arrivée sont possibles, en prenant en compte uniquement le type de problème des patients.

# EXERCICE !!

Encore un jour aux urgences, avec cette fois-ci différents patients. Vous avez : 3 fracturés aux côtes, 6 diarrhéiques, 4 crânes fêlés et 2 AVC. Étant donné que vous êtes stagiaire et que vous n'avez pas grand-chose à faire, vous vous demandez combien d'ordres d'arrivée sont possibles, en prenant en compte uniquement le type de problème des patients.

**RÉPONSE :** $\frac{15!}{3!*6!*4!*2!}$ = 6 306 300 (le résultat numérique n'est pas intéressant, ce qui compte c'est de bien comprendre quand et comment utiliser la formule)

# LA COMBINAISON DE *N* ÉLÉMENTS PRIS *P* À *P*

- utilisée lors des tirages **<u>non ordonnés sans remise ( = tirages simultanés)</u>**
- « je tire 3 boules d'un coup dans l'urne, je regarde le résultat »
- formule : $\mathbf{C_n^p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ avec n le nombre d'éléments de l'ensemble, et p le nombre d'éléments tirés (si p > n)
- **<u>ex :</u>** en tirant au hasard 4 cartes **<u>d'un coup</u>** dans un paquet de 52 cartes, je me demande combien de combinaisons sont possibles ?

$$\longrightarrow \frac{52!}{4!(52-4)!}$$

# EXERCICE !!

Vous êtes chef de service en réanimation à l'hôpital Pasteur à Nice, et vous souhaitez constituer une nouvelle équipe pour la salle de réveil. Pour cela, vous devrez choisir 8 personnes parmi les 122 postulants. Étant donné que vous avez la flemme de lire tous les CV et de faire 122 entretiens d'embauche, vous allez tirer au sort les 8 membres de la nouvelle équipe … Combien d'équipes différentes sont réalisables ?

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

# EXERCICE !!

Vous êtes chef de service en réanimation à l'hôpital Pasteur à Nice, et vous souhaitez constituer une nouvelle équipe pour la salle de réveil. Pour cela, vous devrez choisir 8 personnes parmi les 122 postulants. Étant donné que vous avez la flemme de lire tous les CV et de faire 122 entretiens d'embauche, vous allez tirer au sort les 8 membres de la nouvelle équipe … Combien d'équipes différentes sont réalisables ?

**RÉPONSE :** $\frac{122!}{8!(122-8)!}$

# III. ÉLÉMENTS DE PROBABILITÉ

## Introduction et définitions :

- phénomène aléatoire → on ne peut pas prévoir l'issue (lancer de dé)
- phénomène déterministe → on peut prévoir l'issue (loi de physique)

- expérience aléatoire (= épreuve) → expérience au résultat non prévisible
- ensemble fondamental (Ω) → ensemble des résultats possibles
- évènement → tout sous-ensemble de Ω est un évènement (= ensemble de résultats), **sauf si Ω est non dénombrable**

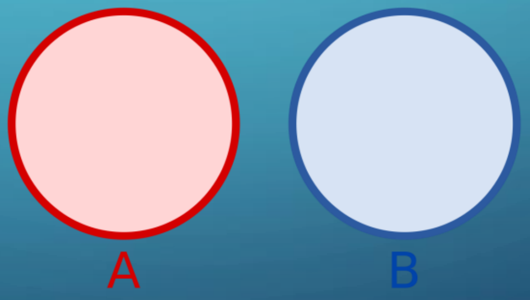
# INTRODUCTION ET DÉFINITIONS :

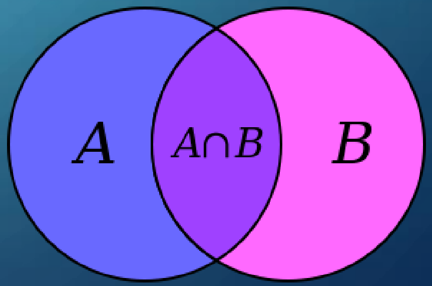
- évènement élémentaire → c'est un évènement qui est constitué uniquement d'un point de l'ensemble Ω, donc d'un seul résultat
- ensemble vide ø → évènement impossible
- ensemble Ω → évènement certain
- **ex :** si on lance un dé, "Obtenir un chiffre pair" est un évènement, et "Obtenir un 5" est un évènement **élémentaire**.

# PROBABILITÉS

- une probabilité associe à un évènement un nombre allant de 0 à 1, elle mesure la chance de réalisation de l'évènement. **ex :** P(obtenir 1) = 1/6
- $P(\varnothing) = 0$
- si $P(A \cap B) = 0$, alors A et B s'excluent mutuellement (ils sont incompatibles).

  $\longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



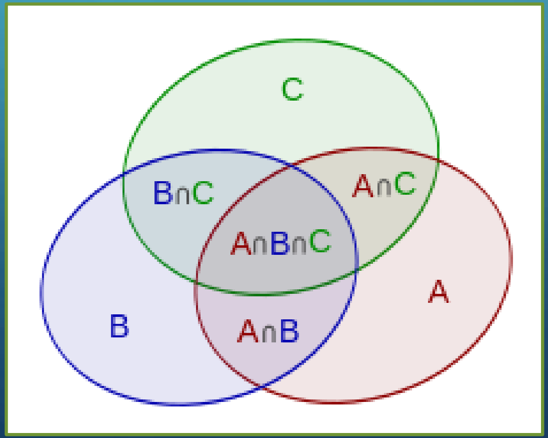

- $\boxed{P(\complement A) = 1 - P(A)}$
- si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (c'est le théorème des probabilités totales)

# PROBABILITÉS

La **propriété d'additivité forte** ou **formule de Poincaré** ou **d'inclusion-exclusion** ou **de crible** (#SynonymesÀConnaître)

- généralisable à un nombre quelconque $n$. Avec $n = 3$, on a :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$



# <u>ÉQUIPROBABILITÉS</u>

- ce mot signifie que tous les éléments ont la même probabilité d'être tirés
- la probabilité d'un évènement A est donc :

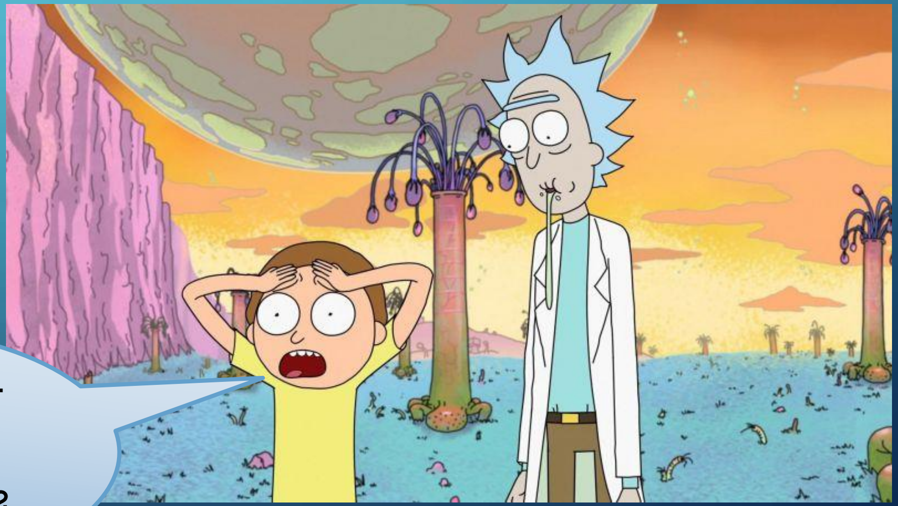
$$\mathbf{P(A)} = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

- avec Card(A) le « nombre de cas favorables » et Card(Ω) le « nombre de cas possibles »
- **<u>ex :</u>** Dans une urne, il y a 15 boules, dont 7 bleues. L'évènement A est « tirer une boule bleue », P(A) = 7/15.

# APPARTÉ FORMULE

- on prélève au hasard un échantillon de *n* pièces, parmi un lot de N pièces au total, contenant D pièces défectueuses.
- Quelle est la probabilité $A_k$ de prélever k pièces défectueuse dans l'échantillon ?

$$P(A_k) = \frac{C_D^k * C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$



# EXERCICE !!

Vous surveillez les opérations du service de cardiologie à Pasteur (la classe). Sur les 33 opérations effectuées aujourd'hui, 6 se sont mal déroulées. Faute de temps, vous avez pu observer uniquement 16 opérations … Quelle est la probabilité que vous observiez 4 opérations se déroulant mal ?

$$P(A_k) = \frac{C_D^k * C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

# EXERCICE !!

Vous surveillez les opérations du service de cardiologie à Pasteur (la classe). Sur les 33 opérations effectuées aujourd'hui, 6 se sont mal déroulées. Faute de temps, vous avez pu observer uniquement 16 opérations … Quelle est la probabilité que vous observiez 4 opérations se déroulant mal ?

**RÉPONSE** : n = 16, N = 33, D = 6, k = 4, donc la formule est …

$$\frac{C_6^4 * C_{33-6}^{16-4}}{C_{33}^{16}}$$

# PROBABILITÉS : ENSEMBLE FINI

- la probabilité de l'évènement est comprise entre 0 et 1
- la somme des probabilités de tous les évènements est égale à 1
- **ex :** considérons un dé biaisé, $P(1) = 1/3$, $P(2) = 1/6$, $P(3) = 1/12$, $P(4) = 1/12$, $P(5) = 1/4$. Trouver $P(6) = ?$

$1/3 + 1/6 + 1/12 + 1/12 + 1/4 + ? = 1$

$? = 1 - 11/12 = 1/12$

# QRU 1

Considérons les évènements A et B. $P(A) = 2/6$ et $P(B) = 4/12$. Sachant que

$P(A \cup B) = 8/12$, que vaut $P(A \cap B)$ ?

A. 6/12

B. 4/12

C. 8/12

D. 2/12

E. Aucune des propositions n'est correcte

# QRU 1

**RÉPONSE E !**

$P(A) + P(B) = 8/12 = P(A \cup B)$, les deux évènements sont DISJOINTS, ainsi,

$P(A \cap B) = 0$ !

# QRU 2

L'attribution des stages infirmiers pour la deuxième année se fait maintenant de manière aléatoire. Admettons qu'il y ait 157 stages différents pour les 157 étudiants différents. Combien de combinaisons peut-on avoir lors de l'attribution de ces stages ? (l'ordre compte)

A. $157^2$

B. $\frac{157!}{(157-1)!}$

C. 157!

D. $157^{157}$

E. Aucune des propositions n'est correcte.

# QRU 2

**RÉPONSE C !**

On utilise ici la permutation d'un ensemble fini à n éléments. En effet, c'est un arrangement de <u>tous les éléments de l'ensemble</u> (tous les 157 stages sont distribués), la formule est donc n!.

# QRU 3

Sur une chaîne de production de médicaments, vous contrôlez la sortie d'un lot de 348 gélules. Parmi ces gélules, il y a 177 gélules violettes, 59 gélules vertes et 112 gélules jaunes. En sachant que ces gélules sortent une à une de la machine à trier, quelle est la probabilité que toutes les gélules jaunes sortent en premières, puis toutes les gélules violettes, et enfin toutes les gélules vertes ?

(ne calculez pas !!! Juste la formule suffit)

A. $\frac{348!}{(348-177)!}$ B. $\frac{1}{177! * 59! * 112!}$ C. $\frac{1}{\frac{348!}{59! * 112! * 177!}}$ D. $\frac{348!}{\frac{348!}{177!(112-59)!}}$ E. Tout faux !

# QRU 3

**RÉPONSE C !**

Ici nous sommes face à une permutation d'un ensemble (le lot de gélules) dont les éléments appartiennent à des mêmes catégories (la couleur des gélules). On utilise donc la formule de la permutation avec répétition. Il s'agit d'une probabilité, on fait donc « nombre de cas favorables (1) / nombre de cas possibles ».

# FIN, MERCI !