TUT' RENTRÉE BIOSTATS'

COURS N°3 : PROBABILITES CONDITIONNELLES, THEOREME DE BAYES INDEPENDANCE EN PROBABILITE

SOMMAIRE

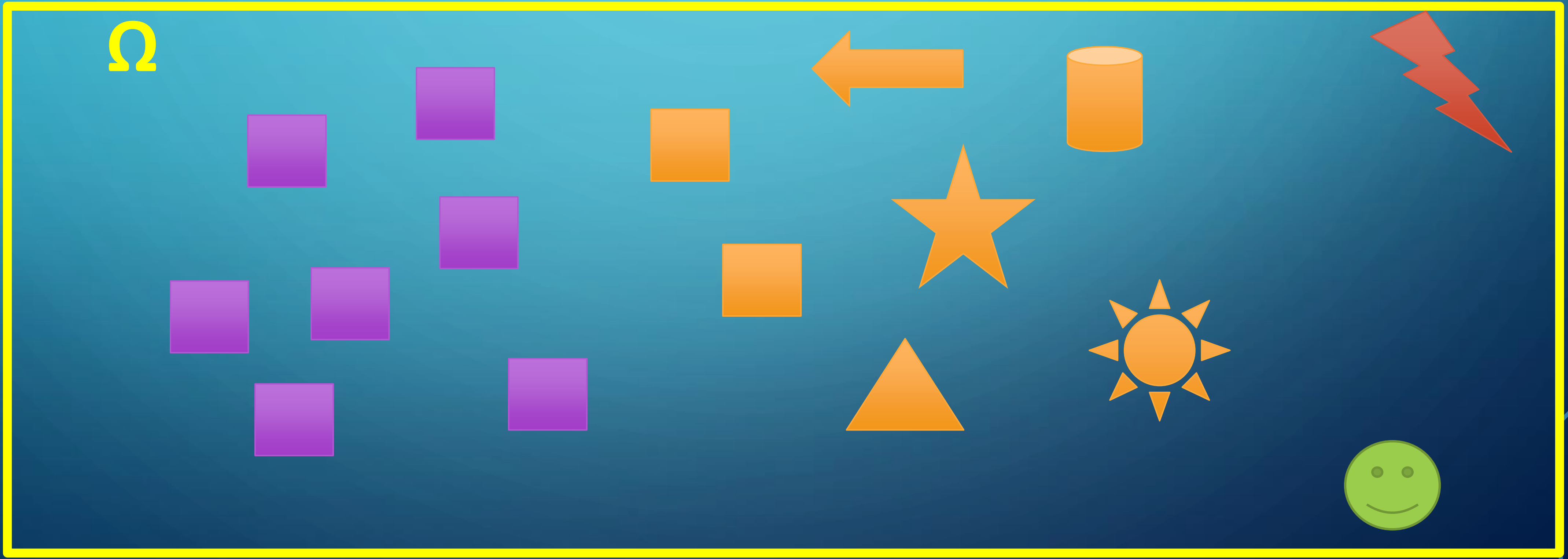
O) DÉFINITIONS DE BASE

Juste pour être sûre que je vous parle pas chinois!

QUELQUES DÉFINITIONS

- **Ω** Ensemble fondamental :

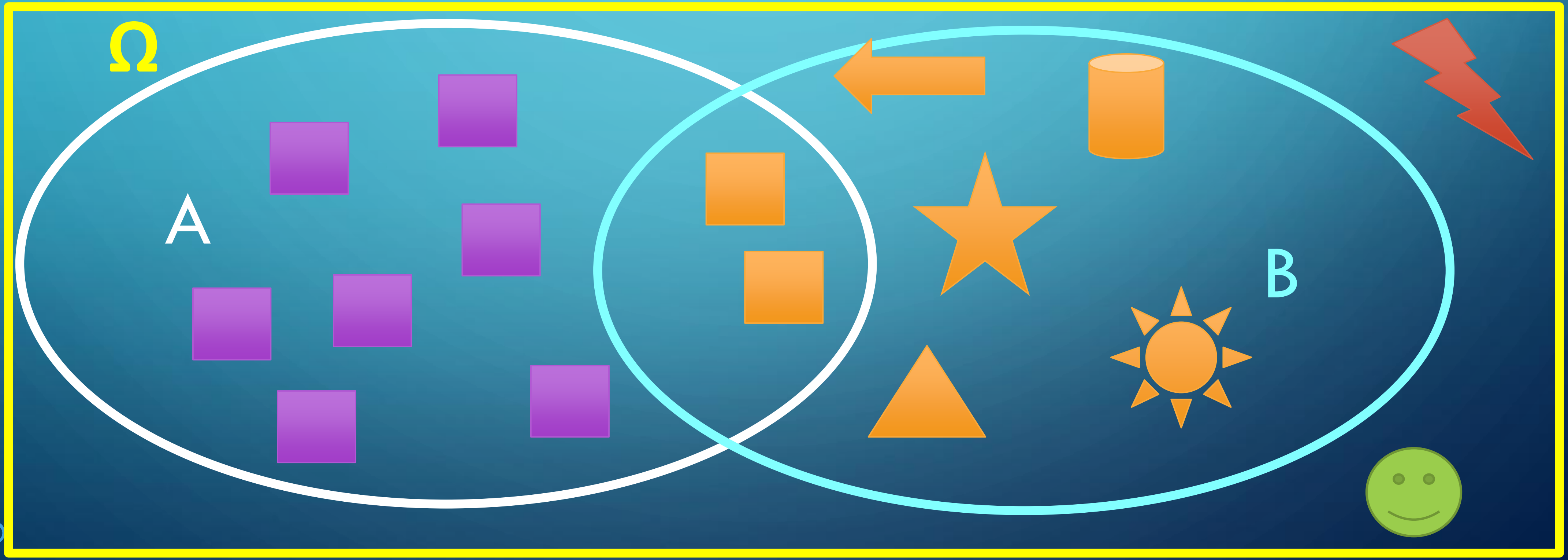
P(Ω)=16/16=1 cela représente 100% des évènements, la probabilité est certaine



QUELQUES DÉFINITIONS

- **P(A)** : Probabilité de l'événement A $(=9/16)$
- **P(B)** : Probabilité de l'événement (B $=7/16)$

Evénement A : Avoir un carré
Evénement B : Avoir un élément orange

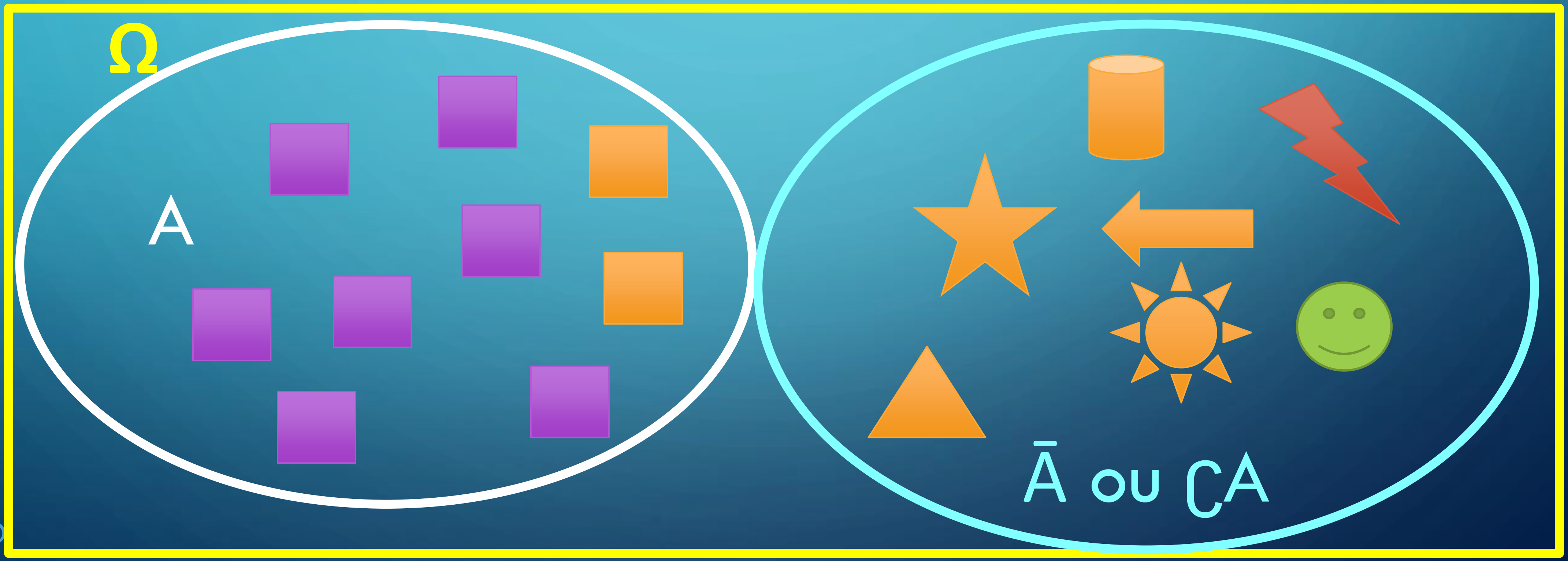


QUELQUES DÉFINITIONS

- **P(A)** : Probabilité de l'événement A $(=9/16)$
- **P(Ā) ou P(∁A)** : Probabilité de l'événement contraire de, c'est-à-dire ne pas avoir A, $(=7/16)$

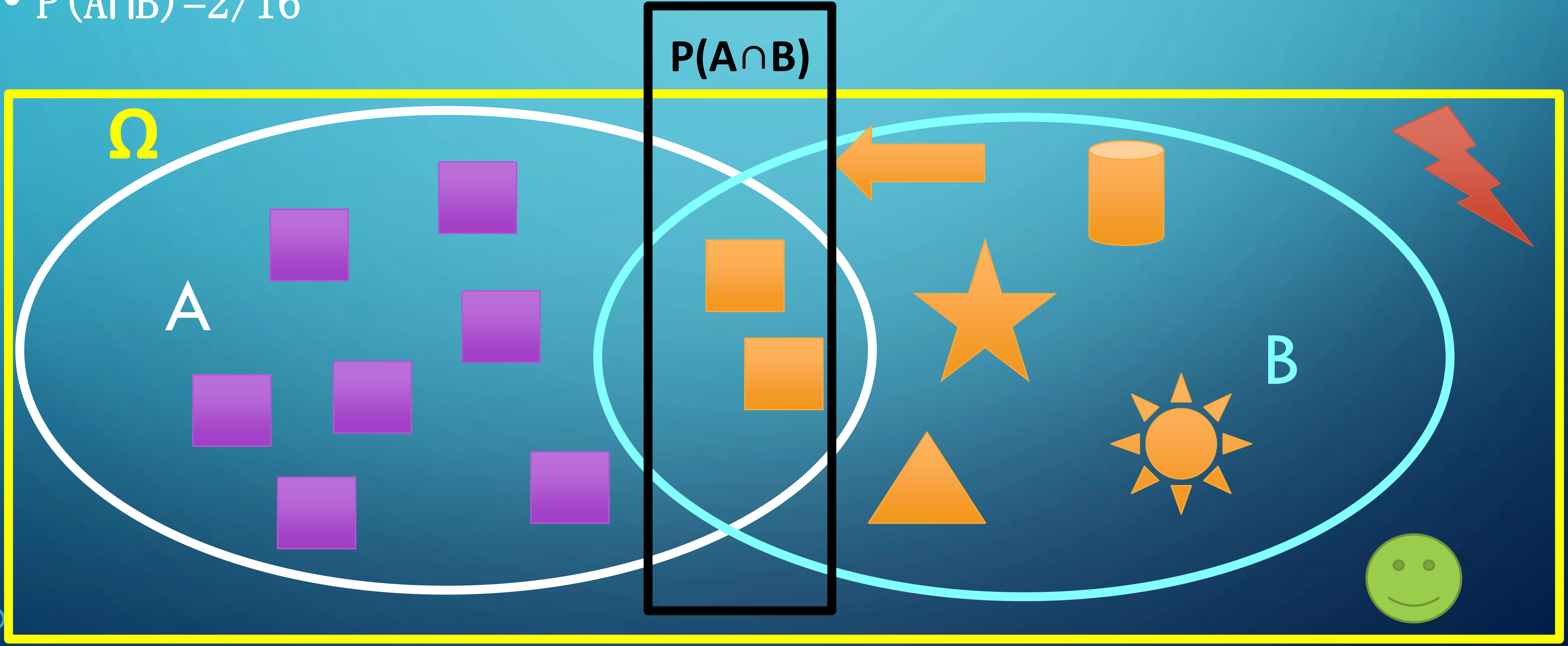
Evénement A : Avoir un carré

Evénement Ā : Ne pas avoir de carré



QUELQUES DÉFINITIONS

- **P(A∩B)=P(B∩A)** : Probabilité de A **et** de B ou Probabilité de B **et** A *(c'est pareil 😉)* ou probabilité de A **inter** B
- P(A∩B)=2/16



I) PROBAS CONDITIONNELLES

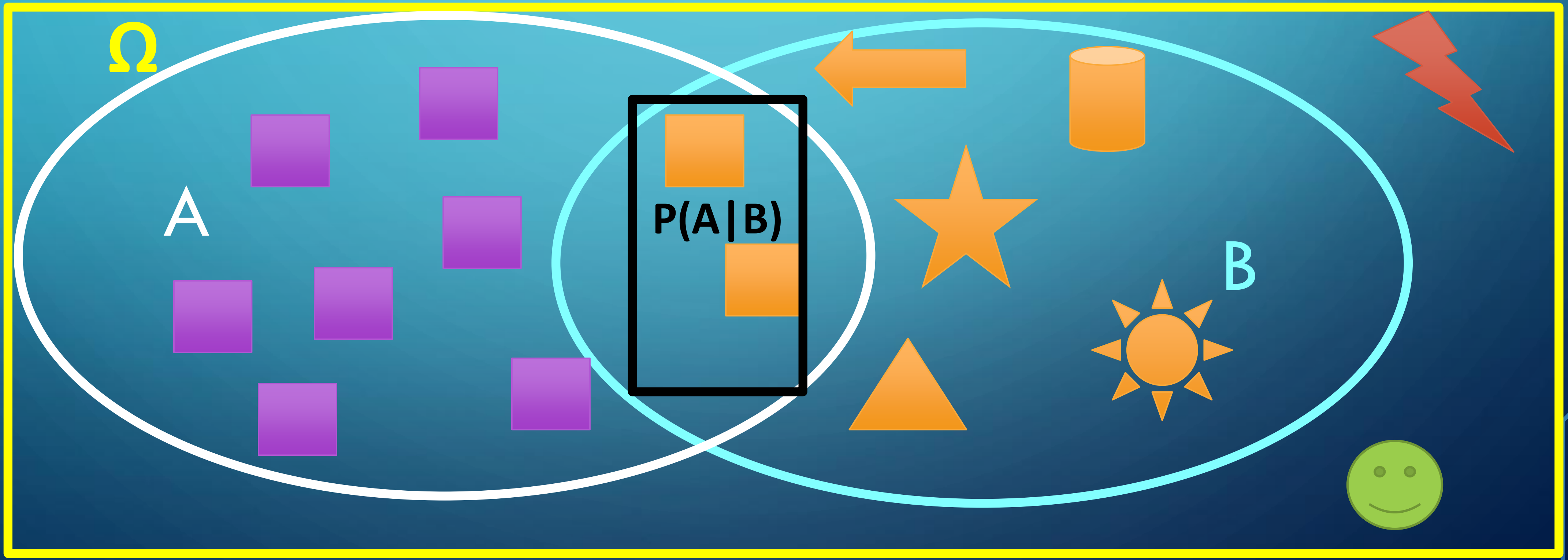
Ça commence à se compliquer…

/!\ **ATTENTION** /!\

P(A|B)≠P(A∩B)

QUELQUES DÉFINITIONS (*SUITE*)

- **P(A|B)=P$_B$(A)** : Probabilité de A sachant B réalisé ou P(A) PARMI B
- P(A|B)=P(A∩B)/P(B)=(2/16)/(7/16)= 2/7 et P(A∩B)=2/16

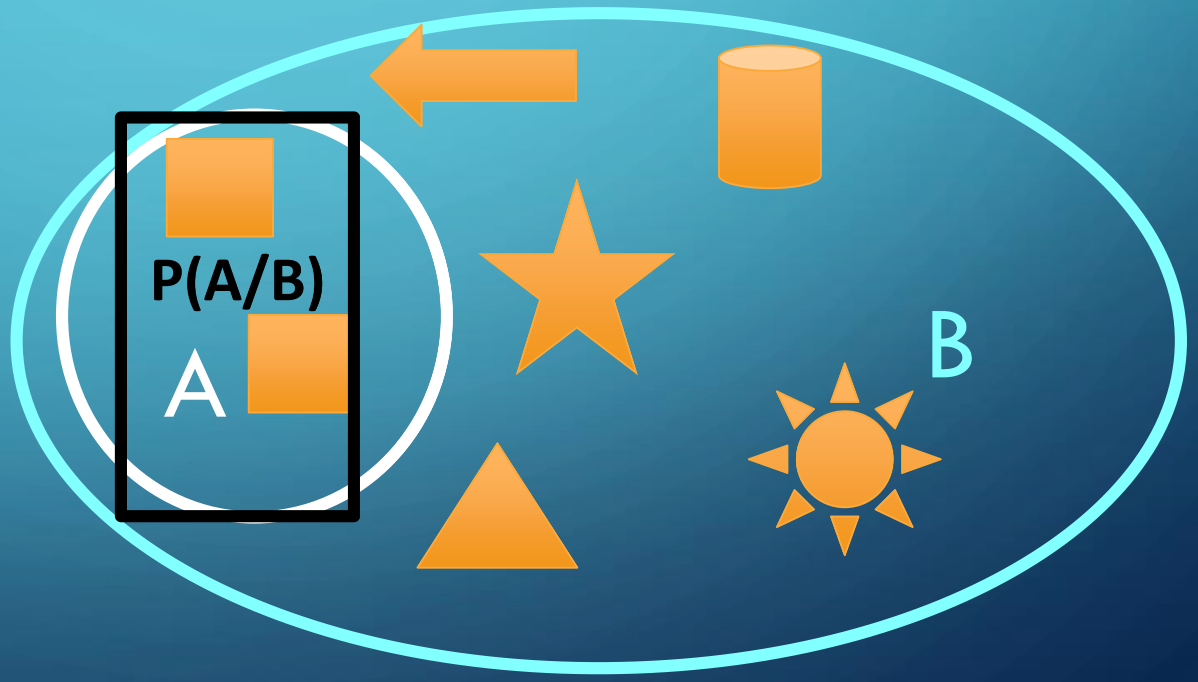


QUELQUES DÉFINITIONS (*SUITE*)

- **$P(A|B)=P_B(A)$** : Probabilité de A sachant B réalisé
- $P(A|B)=P(A\cap B)/P(B)=(2/16)/(7/16)= 2/7$ et $P(A\cap B)=2/16$

QUELQUES DÉFINITIONS (*SUITE*)

- **P(A|B)=P_B(A)** : Probabilité de A sachant B réalisé
- $P(A|B)=P(A\cap B)/P(B)=(2/16)/(7/16)=2/7$ et $P(A\cap B)=2/16$



Allez sur SOCRATIVE avec vos portables

LOGIN-Student-Room name : **PACESTTR**- cliquez sur Join

QCM TIME

socrative by MasteryConnect

Dans un amphi plein à craquer de PACES on sait que 30% des étudiants dorment, 20% rêvent de la pause alors qu'on n'est seulement à la 11ème diapo, et 10% dorment en rêvant de la pause. Je choisis au hasard un étudiant (BG si possible) dans la salle.

Quelle est la proba P1 (*trop mimi*) **qu'il n'ait pas dormi étant donné qu'il rêve de la pause?** (*vous avez 3 heures, non j'rigole 2min*)

A) 0,5

B) ¼

C) 0,25

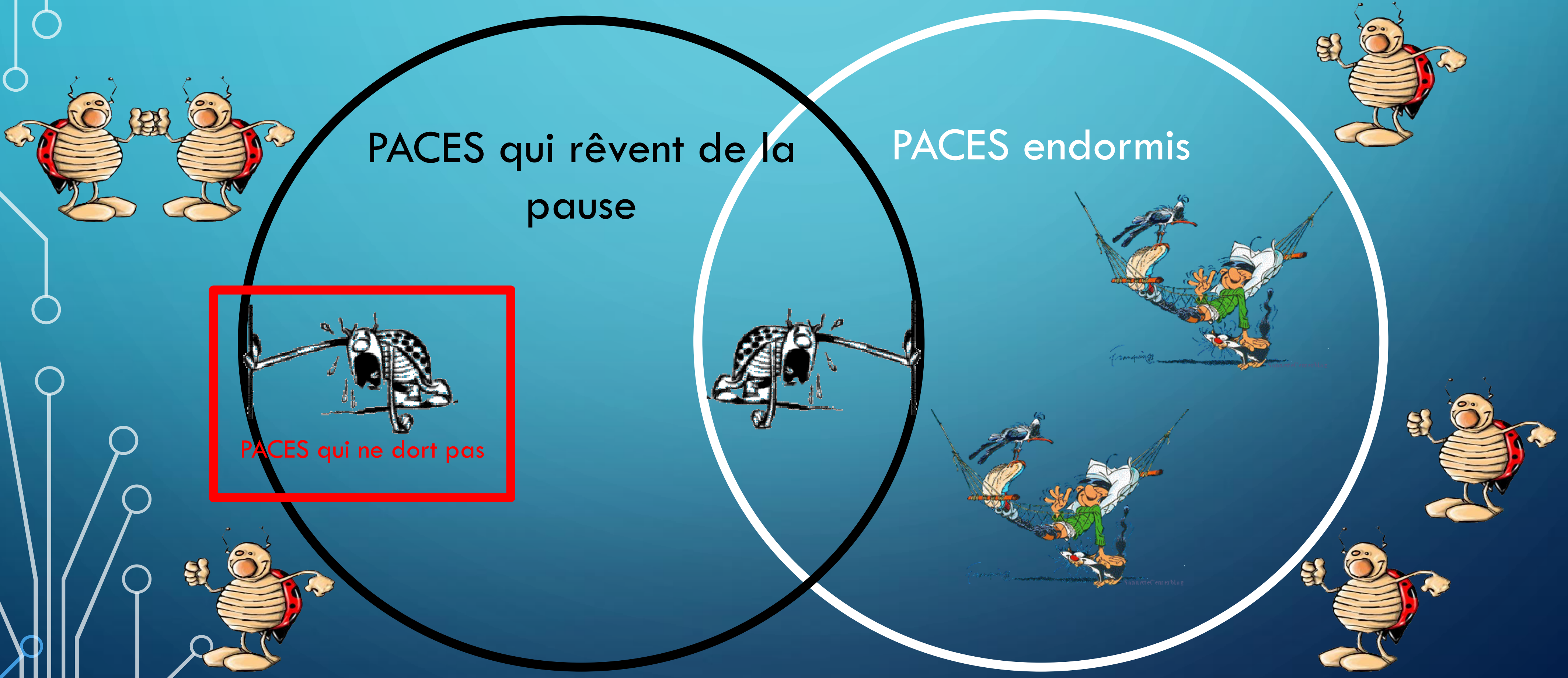
D)1/8

E) toutes les réponses que votre tutrice diabolique vous propose sont fausses

CORRECTION TIME

- **REPONSE A** : 0,5

1 personnage représente 10% sur le schéma :



CORRECTION TIME BIS

On cherche la probabilité qu'un PACES n'ai **pas** dormi étant donné qu'il rêve de la pause!

P(P) : Proba de PACES qui rêvent de pause =20%=0,2

P(A) : Proba de PACES qui dorment =30%=0,3

P($\bar{A}$) : Proba de PACES qui ne dorment pas **=1-P(A)=1-0,3=0,7**

P(A∩P) : Proba de PACES qui dorment et rêvent de la pause =10%=0,1

On veut donc : **P($\bar{A}$/P)**

Or P(P)=P($\bar{A}$∩P)+P(A∩P)= proba de PACES qui rêvent de pause = Proba de PACES qui **dorment** et revent de pause + Proba de PACES qui **ne dorment pas** et rêvent de pause → P($\bar{A}$∩P)=P(P)-P(A∩P

P($\bar{A}$/P)=P($\bar{A}$∩P)/P(P)=[P(P)-P(A∩P]/P(P)=[O,2-0,1]/(0,2)=½=0,5

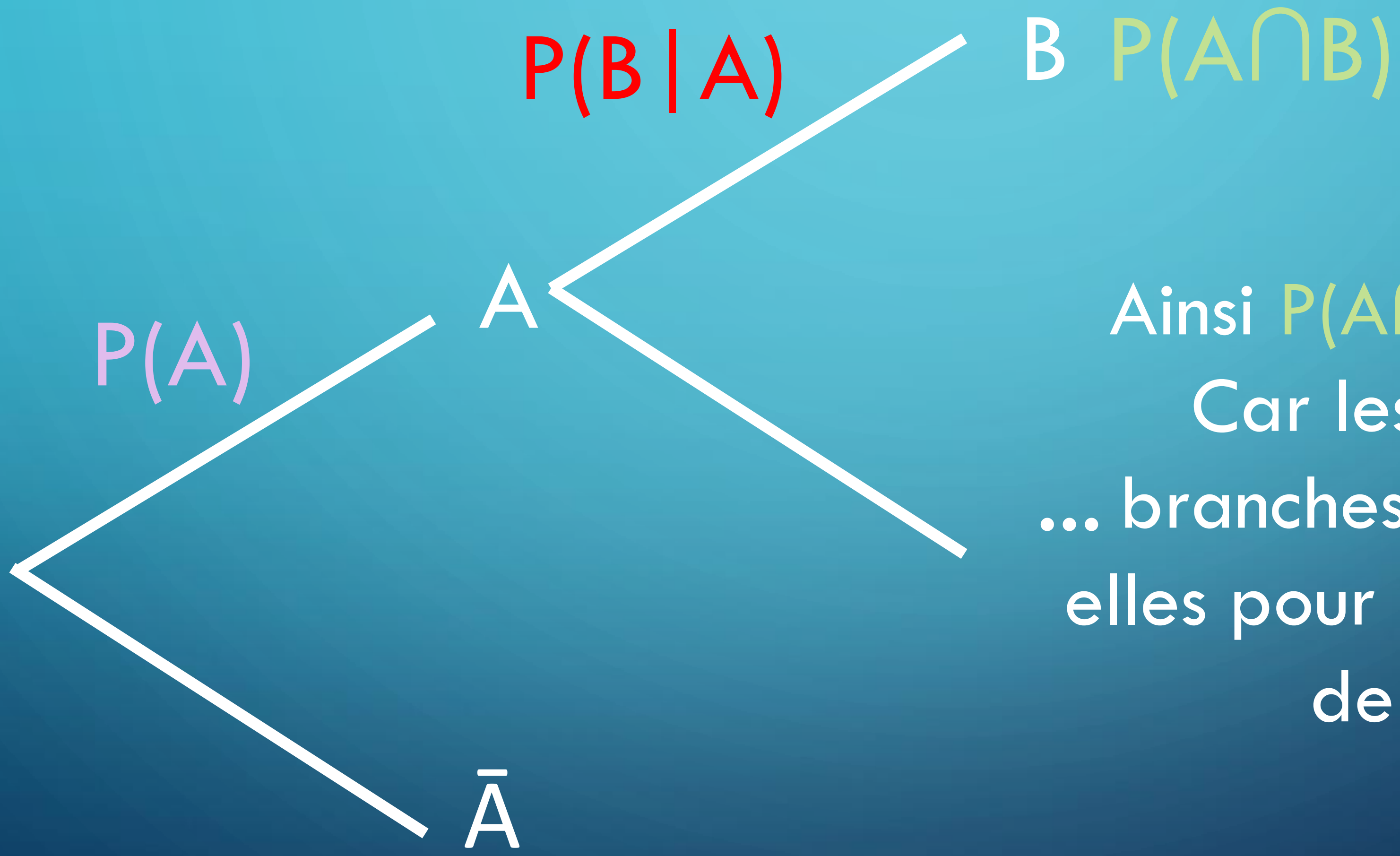
Comme on pouvait voir sur le schéma! Un schéma bien fait aide beaucoup!

THÉORÈME DE LA MULTIPLICATION

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A \mid B) \times P(B) = P(B \mid A) \times P(A)$$

Pour l'instant vous me suivez toujours?

THÉORÈME DE LA MULTIPLICATION EN IMAGE



Ainsi $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$

Car les probabilités des

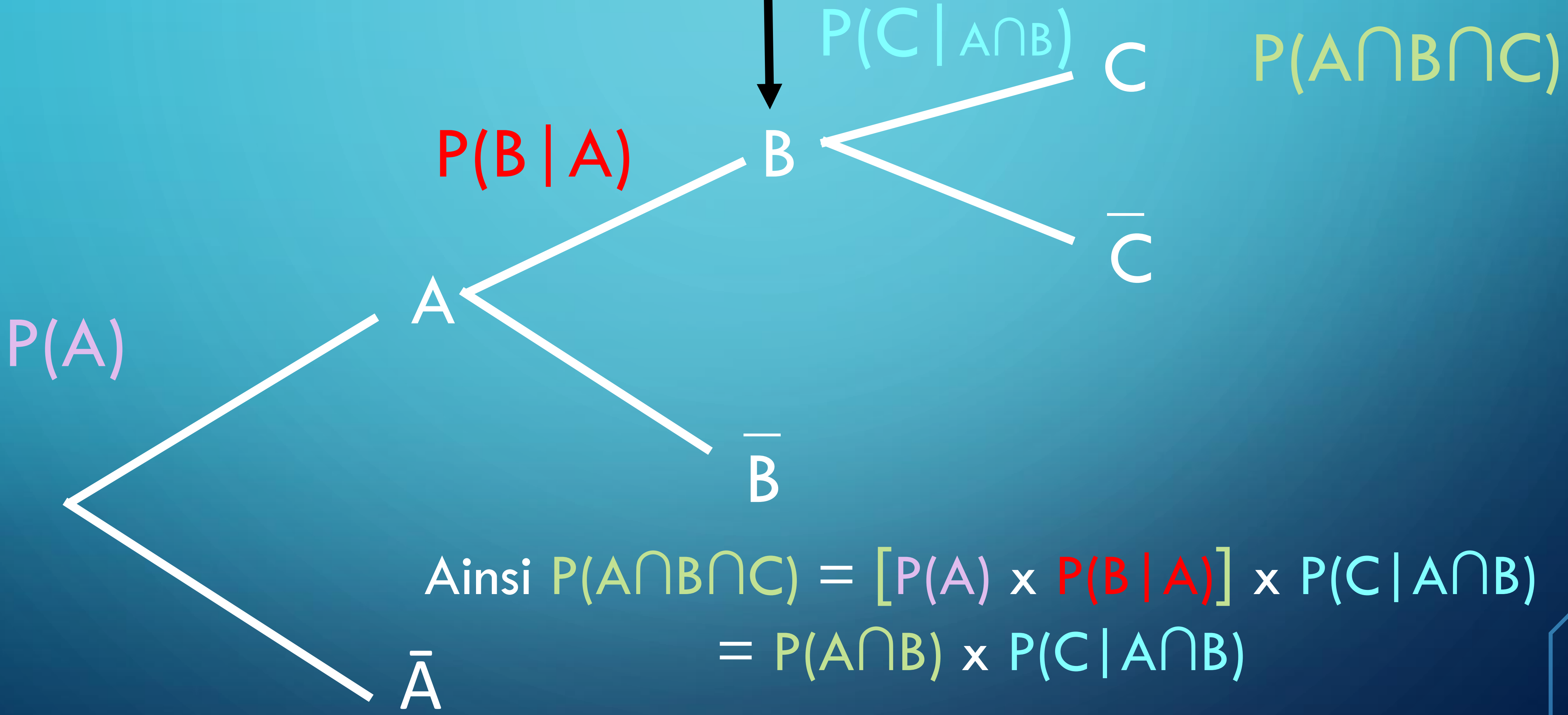
… branches se multiplient entre

elles pour donner la probabilité

de l'issue finale !

PLUS COMPLEXE

Si on s'arrête ici on a : $P(A \cap B)$



Ainsi $P(A \cap B \cap C) = [P(A) \times P(B|A)] \times P(C|A \cap B)$

$= P(A \cap B) \times P(C|A \cap B)$

D'OÙ :

Cette formule *immonde* :

$$P(A_1 \cap A_2 ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)\dots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{n-1})$$

Conclusion : faites des petits schémas ça aide beaucoup!

Allez sur SOCRATIVE avec vos portables

LOGIN-Student-Room name : **PACESTTR**- cliquez sur Join

QCM TIME

Sur 1000 PACES on sait que 800 adorent la Biostat' 400 détestent l'embryo et 100 ne se brossent jamais les dents. Or 12 seulement sont fan de Katy Perry et parmi les PACES qui aiment la biostat 200 haïssent l'embryo. De plus 12% des personnes qui ne se brossent pas les dents sont fan de Katy Perry et parmi ceux qui adorent la biostat et détestent l'embryo on a 50 personnes qui ne se brossent pas les dents.

Quelle est la probabilité qu'un PACES ne se brosse pas les dents et aime la biostat et déteste l'embryo ?

A) 0,5

B) 0,25

C) 1

D) 0,05

E) It's all fake news! Tout est faux!!

CORRECTION

Réponse D 0,05

P(B) : PACES qui aiment la biostat =800/1000

P(E) : PACES qui détestent l'embryo = 400/1000

P(D) : PACES qui ne se brossent pas les dents = 10/1000

Parmi les PACES qui aiment la Biostat' 200 détestent l'embryo = P(E|B) = 200/800

Parmi ceux qui aiment la biostat et détestent l'embryo 50 ne se brossent pas les dents = $P(D|B \cap E) = 50/200$

$P(E \cap B \cap D) = P(E|B) \times P(D|B \cap E) = (200/1000) \times (50/200) = 5/100$

II) DIAGRAMME EN ARBRE

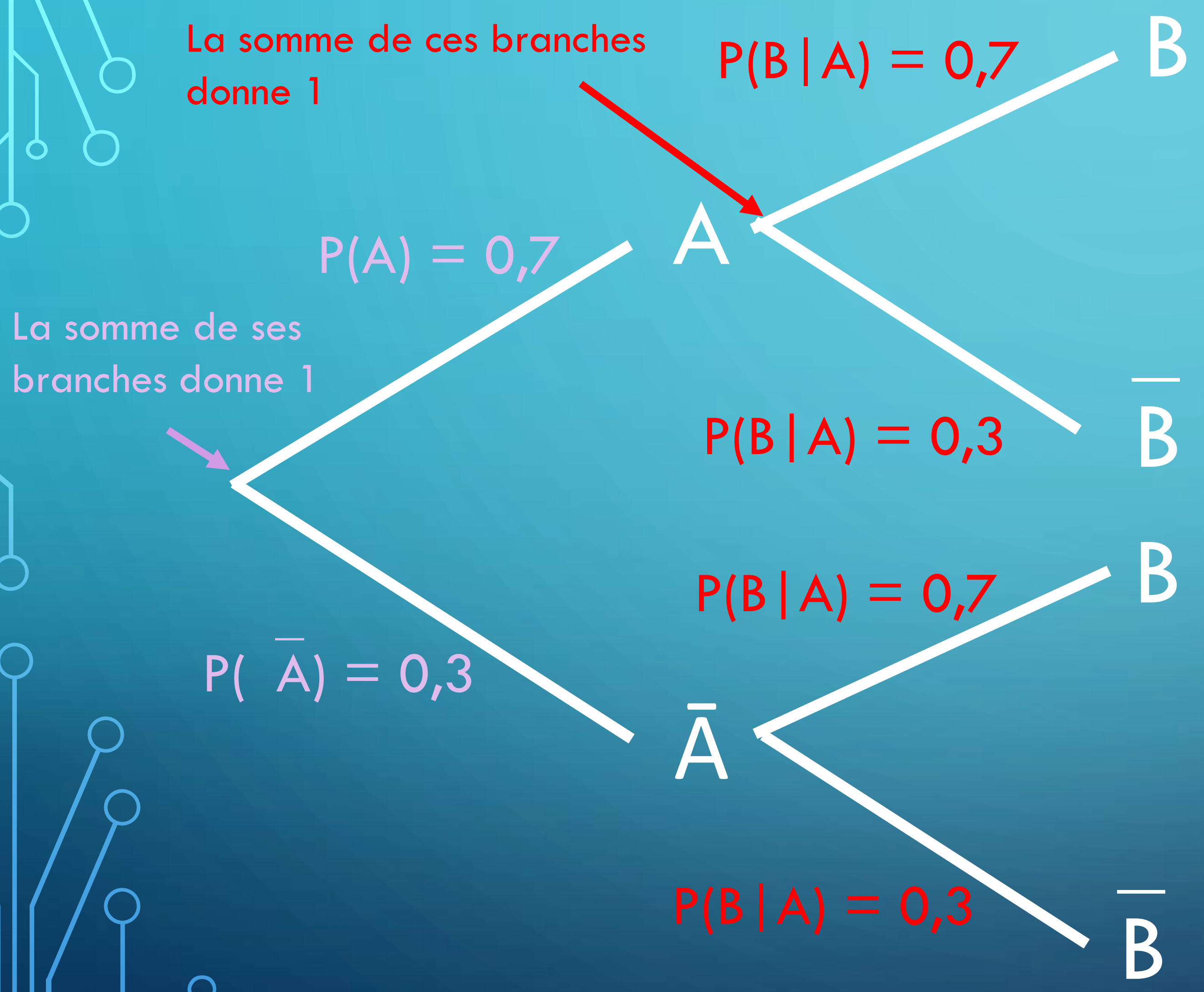
Trop facile!

DÉFINITIONS

- Soit une suite finie d'événement quand une expérience dépend du résultats de l'expérience passée ce sont des probabilités conditionnelles.
- On utilise les **arbres** pour illustrer les situations!

1. Selon le **théorème de la multiplication** la probabilité d'un chemin est le produit de chaque branche du chemin!
2. Les chemins s'excluent mutuellement.
3. La somme de toutes les probabilités des finalités doit être 1.

EXEMPLE



$P(B \cap A) = 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}49$

Ainsi
0,49+0,21+0,21+0,09 = 1!

$P(\overline{B} \cap A) = 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21$

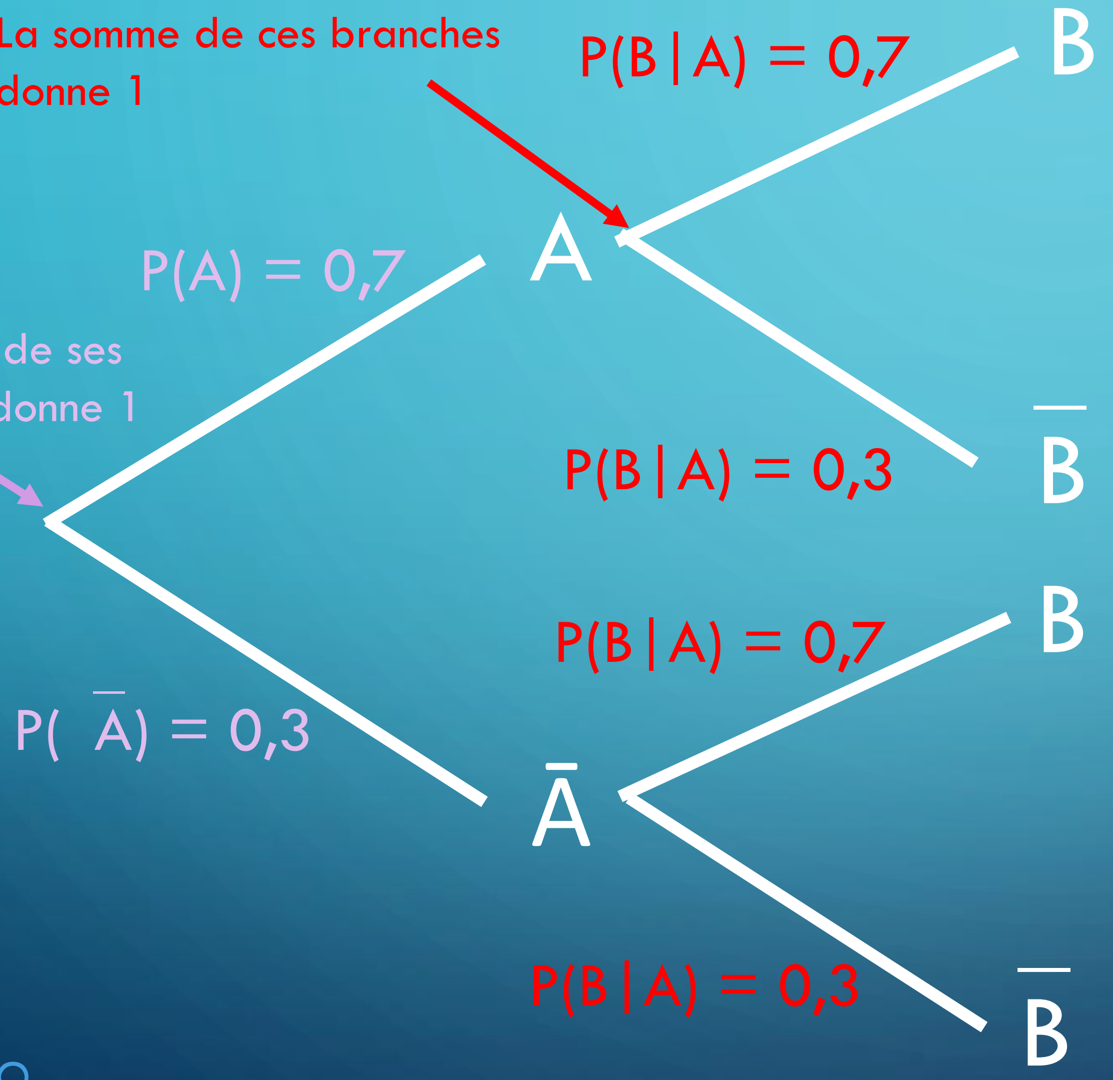
$P(B \cap \overline{A}) = 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21$

$P(\overline{B} \cap \overline{A}) = 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$

EXEMPLE

La somme de ces branches donne 1

La somme de ses branches donne 1



$P(B \cap A) = 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}49$

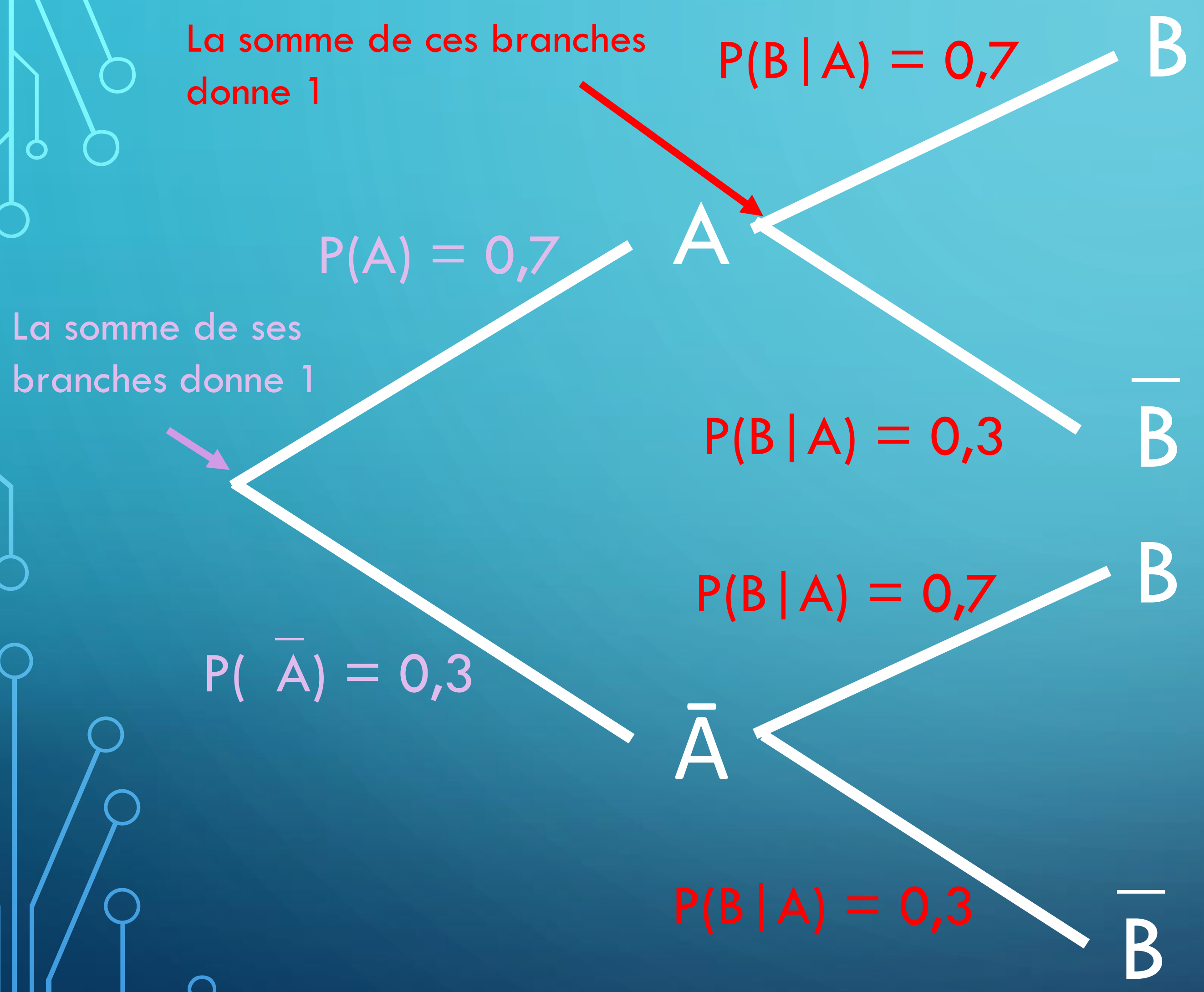
$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$
$= 0{,}49 + 0{,}21 = 0{,}7$

$P(\bar{B} \cap A) = 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21$

$P(B \cap \bar{A}) = 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21$

$P(\bar{B} \cap \bar{A}) = 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$

EXEMPLE



$P(B \cap A) = 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}49$

$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A})$
$= 0{,}49 + 0{,}21 = 0{,}7$

$P(\overline{B} \cap A) = 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21$

$P(B \cap \overline{A}) = 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21$

$P(\overline{B} \cap \overline{A}) = 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$

Allez sur SOCRATIVE avec vos portables

LOGIN-Student-Room name : **PACESTTR**- cliquez sur Join

QCM TIME

A propos des diagrammes en arbre…

Quelle(s) proposition(s) est (sont) exacte(s) ?

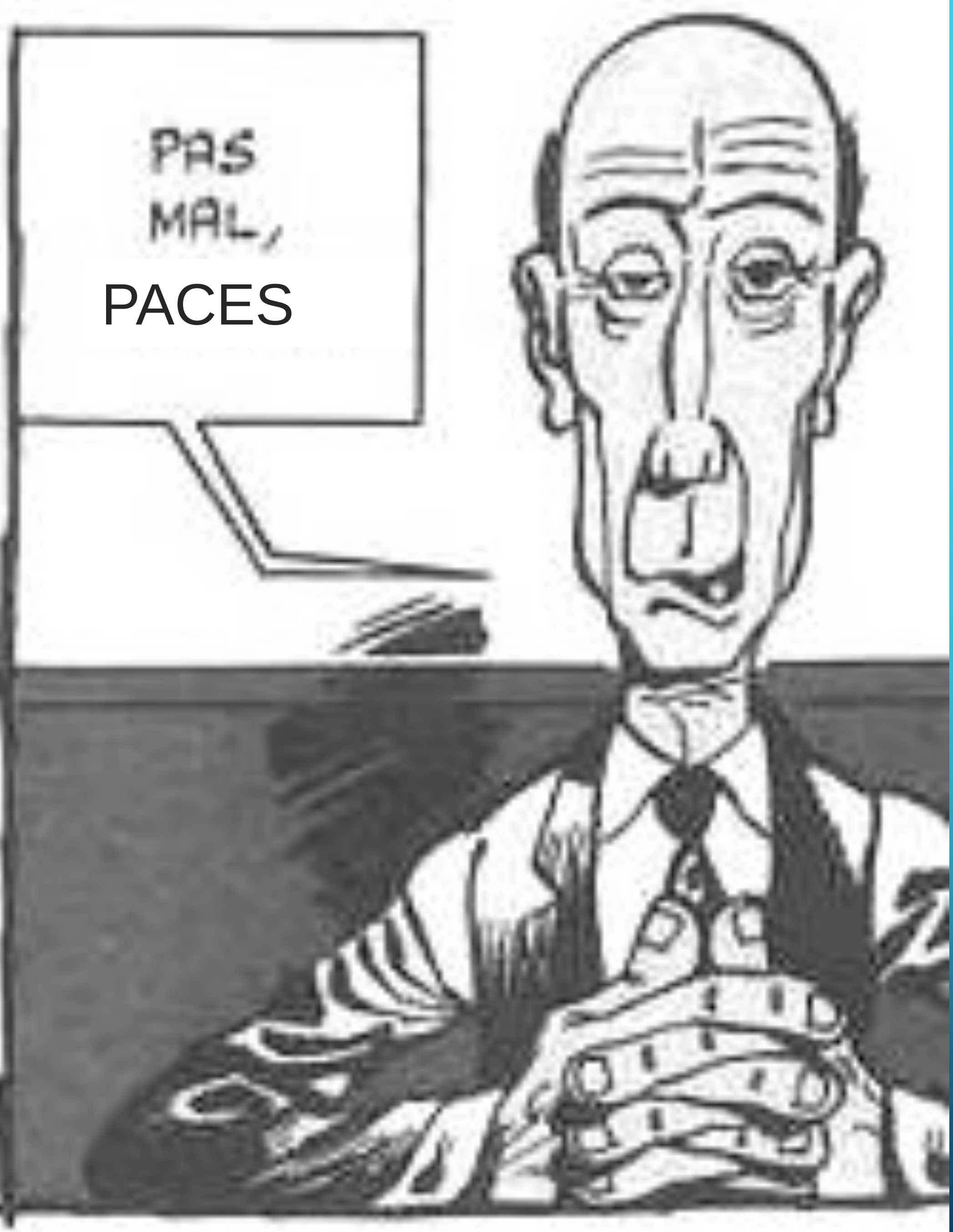
A) La somme des probabilités d'un chemin est égale à 1

B) Un événement peut emprunter deux chemins différents car ils ne s'excluent pas mutuellement.

C) C'est le théorème de Bayes qui permet de calculer la probabilité d'un chemin.

D) C'est le théorème de la multiplication qui dit que la somme de toutes les branches d'un chemin donne sa probabilité.

E) C'est nimp, tout est faux. (*Ils ont fumés quoi ces tuteurs sérieux ?*)



CORRECTION

A propos des diagrammes en arbre…

Quelles propositions sont exactes ?

A) La somme des probabilités d'un chemin est égale à 1

B) Un événement peut emprunter deux chemins différents car ils ne s'excluent pas mutuellement.

C) C'est le théorème de Bayes qui permet de calculer la probabilité d'un chemin.

D) C'est le théorème de la multiplication qui dit que la somme de toutes les branches d'un chemin donne sa probabilité.

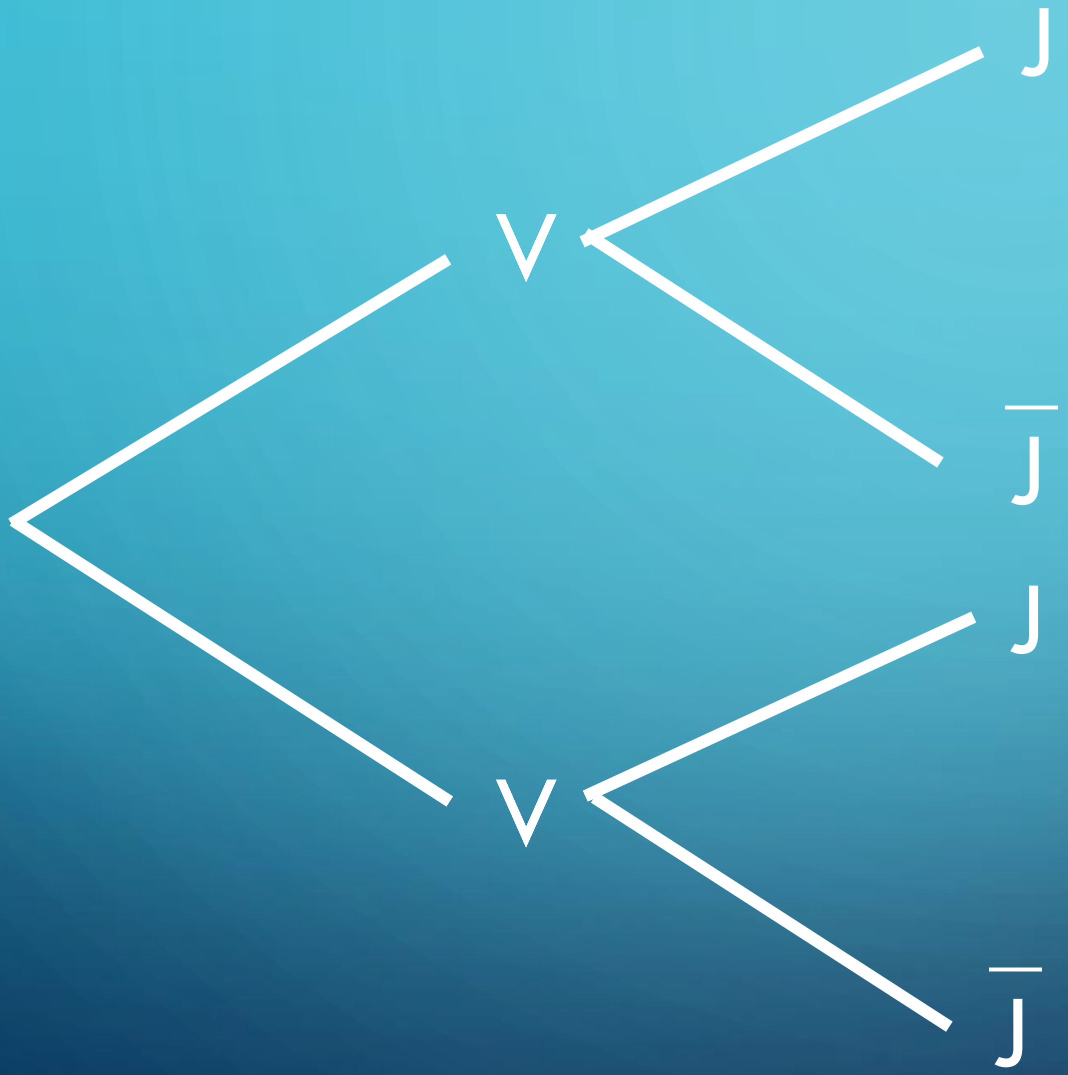
E) C'est nimp, tout est faux. (*Ils ont fumés quoi ces tuteurs sérieux ?*)

CORRECTION

Réponse E

A) La somme des probabilités d'un chemin est égale à 1 FAUX sommes des probas finales

CORRECTION



B) Un événement peut emprunter deux chemins différents car ils ne s'excluent pas mutuellement. FAUX Les chemins s'excluent mutuellement

Ex : si je prend le chemin « je suis vacciné et j'ai bu un verre de jus d'orange » je ne peux pas prendre à la fois le chemin « je ne suis pas vaccinée et j'ai bu un verre de jus » ni « je suis vacciné et je n'ai pas bu un verre de jus ». Les chemins s'excluent, c'est soit l'un soit l'autre

CORRECTION

- C) C'est le théorème de Bayes qui permet de calculer la probabilité d'un chemin. FAUX C'est le théorème de la multiplication !
- D) C'est le théorème de la multiplication qui dit que la somme de toutes les branches d'un chemin donne sa probabilité. FAUX Oui c'est le théorème de la multiplication mais il s'agit d'un produit et non d'une somme

III) FORMULE ET THÉORÈME DE BAYES

Ce fameux Mr Bayes!

FORMULE DE BAYES

Définition d'une proba conditionnelle :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ ou } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

+

Théorème de la multiplication :

$$P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B) = P(B \mid A) \times P(A)$$

=

Formule de Bayes :

$$\boxed{P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) \times P(B)}{P(A)}}$$

ÇA SERT À QUOI ?

Exemple :

Sur 100 licornes 10 ont une corne violette et 50 ont une queue multicolore! Or parmi les licornes à corne violette 4 ont la queue rose, les autres ayant une queue multicolore.

Quelle est la probabilité pour un chasseur d'avoir tué une licorne avec une corne violette sachant qu'il voit qu'elle a t une queue est multicolore ? ?

Proposez vos réponses !

CORRECTION

Etape 1 : Traduire l'énoncé.

- *« Sur 100 licornes 10 ont une corne violette »* = $\frac{10}{100}$ =P(Corne Violete)= P(V)=0,1
- *« 50 ont une queue multicolore »* = $\frac{50}{100}$=P(Queue Multicolore) = P(M)=0,5
- *« Or parmi les licornes à corne violette 4 ont la queue rose »* = P(queue rose sacahant violette)=P(R|V)= $\frac{queue\ rose\ \ et\ corne\ violette}{cornes\ violettes}$=$\frac{4}{10}$=0,4
- *« Les autres ayant une queue multicolore »* = sur les 10 licornes à corne violette 4 ont une queue rose donc « les autres » se sont les 6 autres = P(M|V) = $\frac{6}{10}$=0,6

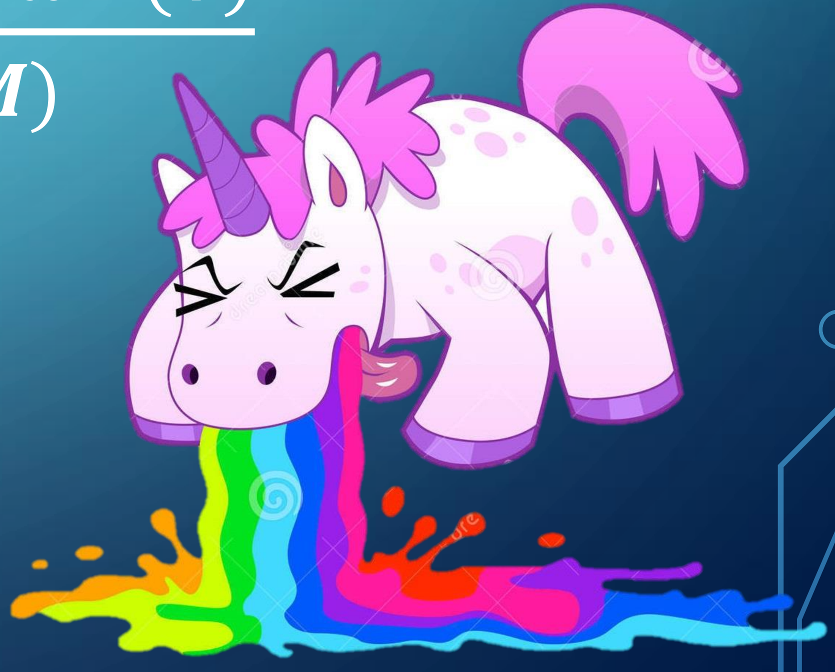
➢ *« Combien de licornes ont une corne violette sachant que leur queue est multicolore*? » = **On cherche P(V|M) or on a P(M|V) : On utilise donc la formule de Bayes!**

CORRECTION SUITE

Application de la formule de Bayes :

$$\mathbf{P(V \mid M)} = \frac{P\,(\mathbf{M} \mid \mathbf{V})\ x\, P(\mathbf{V})}{P(M)}$$

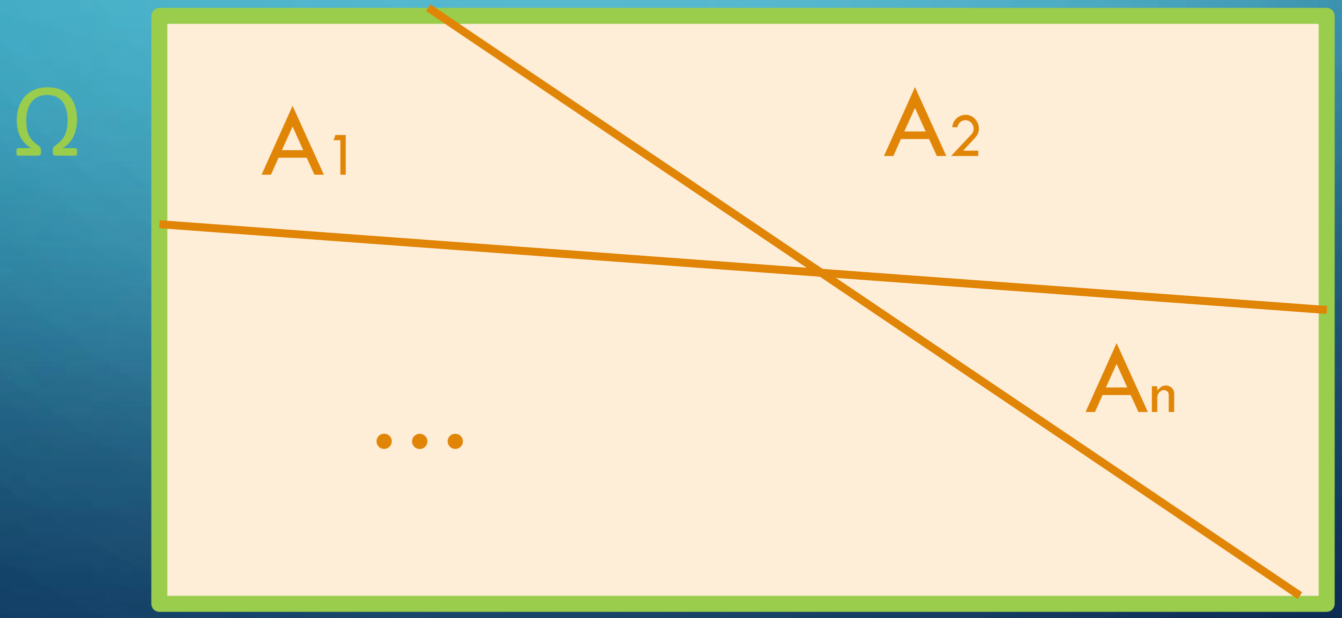
$$= \frac{0{,}6\ \ x\ 0{,}1}{0{,}5} = 0{,}12$$



THÉORÈME DE BAYES

- <u>Introduction</u> :

Soit un univers Ω formé par un ensemble d'événements de A_1 à A_n. On dit que cet ensemble d'événements de A_1 à A_n constitue une **partition** de Ω.

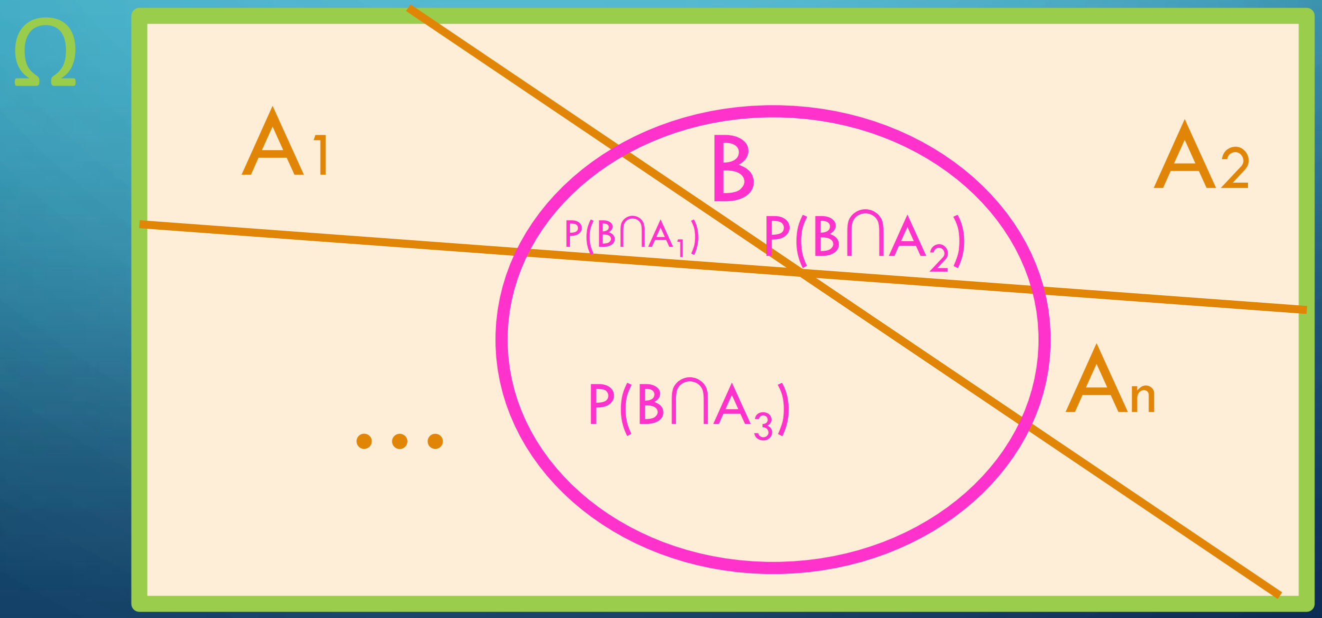


THÉORÈME DE BAYES

- Théorème des probabilités totales :

$P(B) = \mathbf{P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})}$

ici : $= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$:



THÉORÈME DE BAYES

Théorème des probabilités totales :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$$

+

Théorème de la multiplication :

$$P(B \cap A_n) = P\,(B \mid A_n) \times P(A_n)$$

=

$$P\,(B) = P\,(A_1 \mid B)xP(A_1) + P\,(A_2 \mid B)xP(A_2) + \ldots + P\,(A_n \mid B)xP(A_n)$$

THÉORÈME DE BAYES

$$P(B) = P(A_1 \mid B) x P(A_1) + P(A_2 \mid B) x P(A_2) + \ldots + P(A_n \mid B) x P(A_n)$$

+

Formule de Bayes :

$$P(A_n \mid B) = \frac{P(B \mid An)\ x\ P(An)}{P(B)}$$

=

Théorème de Bayes :

$$P(An \mid B) = \frac{P(B \mid An)\ x\ P(An)}{P(A_1 \mid B) x P(A_1) + P(A_2 \mid B) x P(A_2) + \ldots + P(An \mid B) x P(An)}$$

III) ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

Dernière partie c’est bientôt fini!

DÉFINITIONS

- Deux événements sont **indépendants** si $P(B \cap A) = P(A) \times P(B)$.
- Les événements sont indépendants dans la mesure où la probabilité de réalisation de A ne change pas avec la réalisation de B. Soit $P(A|B)=P(A)$ et $P(B|A)=P(B)$!

CONSÉQUENCES

- A et $\overline{B}$ sont indépendants.
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.
- $\overline{A}$ et B sont indépendants.

EXEMPLES

Porter un tee-shirt jaune ET avoir eu la varicelle enfant. →INDEPENDANT

Être bloqué dans un embouteillage ET arriver en retard.

→PAS INDEPENDANT

Car il peut y avoir un lien !

CAS DE TROIS ÉVÉNEMENTS

Soient A, B et C.

- **Si** ils sont indépendants deux à deux (*A indépendant de B, A indépendant de C et C indépendant de B*).
- **Et si** $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$

→ **Alors** ces trois événements sont indépendants !

Remarque : *La seconde condition n'est pas une conséquence de la première. C'est-à-dire que les trois événements peuvent être indépendants deux à deux* ***mais*** *on peut avoir :* $P(A \mid B \cap C) \neq P(A)$

EXEMPLE

- A : Avoir les cheveux clairs P(A)=0,5
- B : Porter des chaussettes vertes P(B)=0,2
- C : Avoir eu la varicelle P(C)=0,1

- La proba d'avoir les cheveux clairs sachant que je porte des chaussettes vertes=P(A|B)=0,5=P(A). → Les deux événements sont indépendants.
- La proba d'avoir les cheveux clairs sachant que j'ai eu la varicelle =P(A|C)=0,5=P(A). → Les deux événements sont indépendants.
- La proba d'avoir eu la varicelle sachant que je porte des chaussettes vertes=P(C|B)=0,1=P(A). → Les deux événements sont indépendants.

Les événements sont indépendants deux à deux

MAIS la proba d'avoir eu la varicelle sachant que j'ai les cheveux clair ET que mes chaussettes sont vertes =0,3=P(C|B∩A) ≠ P(C)

P(A∩B∩C)= P(A)xP(B)xP(C)

CONCLUSION : Les trois événements ne sont pas indépendants

DÉMONSTRATION (POUR LE KIFF OSEF)

$P(C|B\cap A)=0,3$

$P(A\cap B\cap C)=P(A)xP(B|A)xP(C|B\cap A)$

$=0,5x0,2x0,3$

$=$**0,03**

$P(A)xP(B)xP(C)=0,5x0,2x0,1$

$=$**0,01**

$\neq$**0,03**

Donc $P(A\cap B\cap C)\neq P(A)xP(B)xP(C)$

Allez sur SOCRATIVE avec vos portables

LOGIN-Student-Room name : **PACESTTR**- cliquez sur Join

QCM TIME

socrative by MasteryConnect

A propos des événements indépendants et des probas en général. **Quelle(s) proposition(s) est (sont) exacte(s) ?**

A) P(A⋂B)=P(B⋂A)

B) A et B indépendants n'implique pas toujours A et $\overline{B}$ indépendants.

C) Si P(B⋂A) = P(A) x P(B) les événements sont incompatibles.

D) Soient A, B et C Si ils sont indépendants deux à deux alors P(A⋂B⋂C)=P(A)xP(B)xP(C).

E) Que de carabistouilles ! Saperlipopette tout est âneries et aucune des réponses A, B, C et D n'est juste !

KORAIXION

Réponse A

A) $P(A \cap B)=P(B \cap A)$ VRAI

B) A et B indépendants n'implique pas toujours A et $\overline{B}$ indépendants. FAUX ça l'implique toujours c'est une des conséquences !

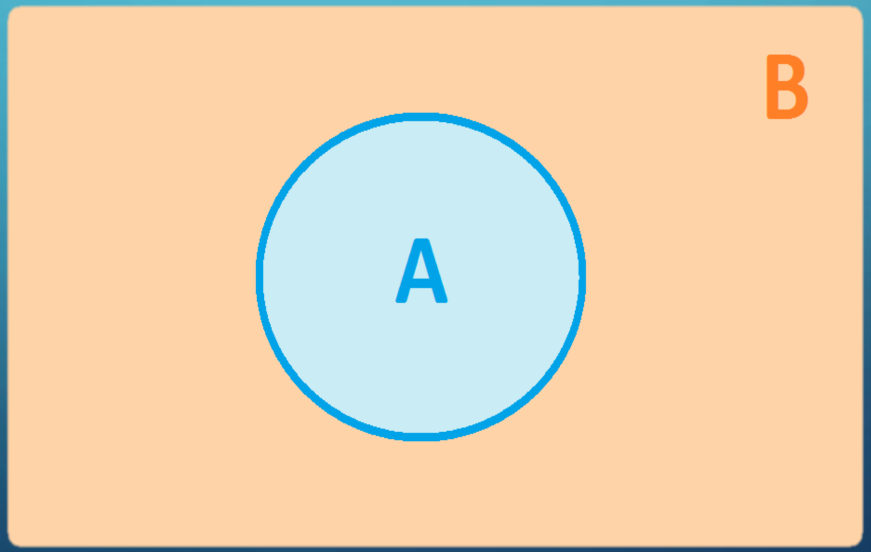
C) Si $P(B \cap A) = P(A) \times P(B)$ les événements sont incompatibles. FAUX Ils sont indépendants !

D) Soient A, B et C Si ils sont indépendants deux à deux alors $P(A \cap B \cap C)=P(A)xP(B)xP(C)$. FAUX si 1) ils sont indépendants deux à deux et 2) $P(A \cap B \cap C)=P(A)xP(B)xP(C)$ ALORS ils sont tous les trois indépendants

INDÉPENDANCE ET INCLUSION

$A \subset B$: A est **inclus** dans B → **$P(A \cap B) = P(A)$**

Remarque : *On a $P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$ avec la proba de B sachant A égale à 1, car A étant inclus dans B on est certain d'avoir B !*



INDÉPENDANCE ET INCLUSION

Formule de Bayes quand $A \subset B$:

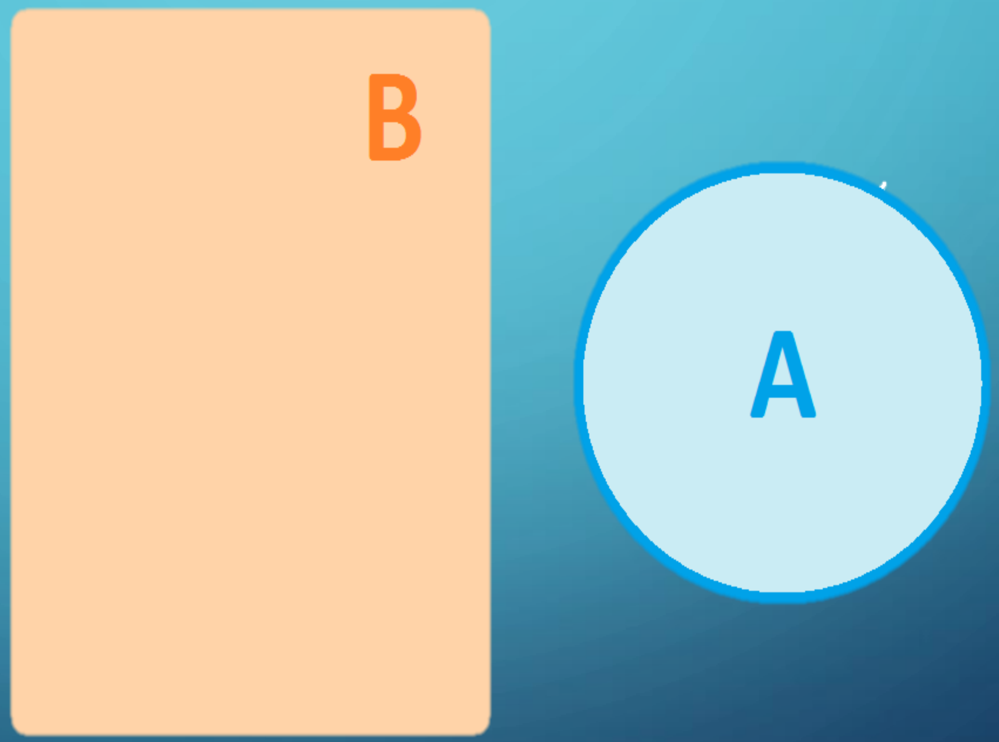
$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

/!\ A et B ne sont PAS indépendants /!\

INDÉPENDANCE ET EXCLUSION

$(A \cap B) = \varnothing$; $P(A \cap B) = 0$: A et B sont **exclusifs/disjoints**

→ $P(A \mid B) = P(B \mid A) = 0$



/!\ A et B ne sont PAS indépendants /!\

⚠ A ne pas confondre ⚠	
Incompatibles=exclusifs=disjoints	**Indépendants**
Ne fait PAS intervenir leur probabilité	Liés à leur probabilité
Ne peuvent PAS se produire en même temps	Peuvent se produire en même temps (*la réalisation d'un n'influençant pas l'autre*)
Défini par : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ Donne : $P(A \cap B) = 0$	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Allez sur SOCRATIVE avec vos portables

LOGIN-Student-Room name : **PACESTTR**- cliquez sur Join

socrative by MasteryConnect

DERNIER QRU

A propos des événements indépendants et des probas en général. **Quelle(s) proposition(s) est (sont) exacte(s) ?**

A) P (B | A) = $\frac{P(B)}{P(A)}$ n'est pas une expression e la formule de Bayes.

B) Quand A $\subset$ B, A et B sont indépendants.

C) Quand P(A$\cap$B)=0 A et B sont indépendants.

D) Si A et B sont incompatibles on dit qu'ils sont exclusifs et non pas disjoints.

E) Jpp ! Ils m'ont tué ! Une pause par pitié ! Tout est faux !

CORRECTION PRESQUE FINI DERNIÈRE DIAPO PROMIS

Réponse E

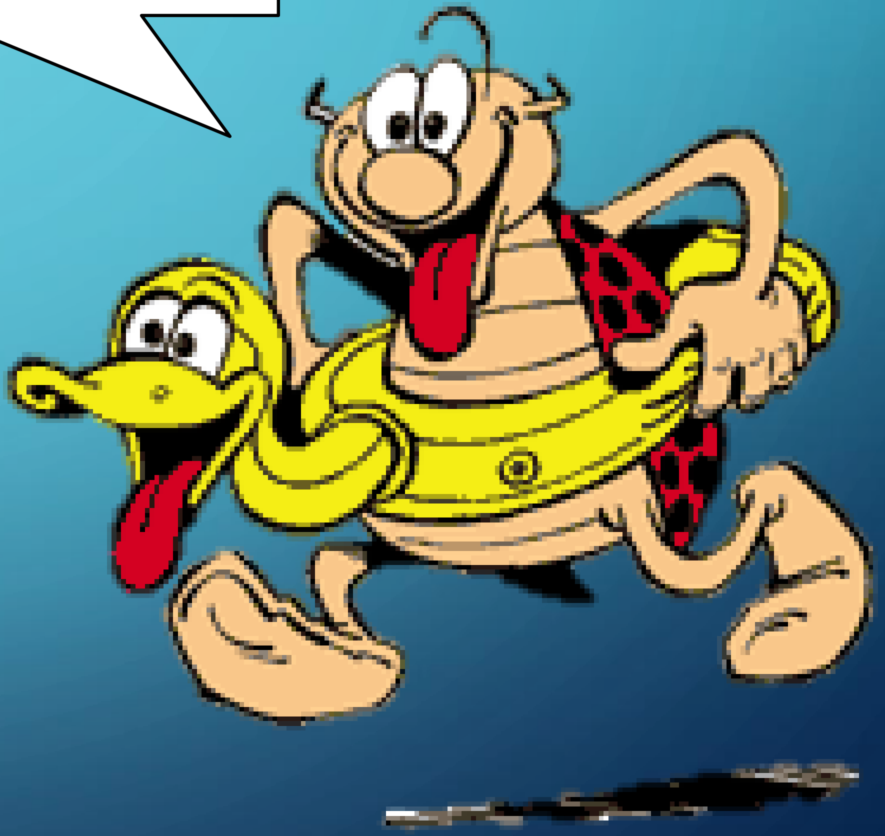
A) P (B | A) $= \frac{P(B)}{P(A)}$ n'est pas une expression e la formule de Bayes. FAUX c'est la formule de Bayes quand A $\subset$ B.

B) Quand A $\subset$ B, A et B sont indépendants. FAUX ils ne peuvent pas être indépendant car A est inclus dans B.

C) Quand P(A$\cap$B)=0 A et B sont indépendants. FAUX ils sont alors disjoints, ils sont indépendants quand P (A$\cap$B) = P(A) x P(B)

D) Si A et B sont incompatibles on dit qu'ils sont exclusifs et non pas disjoints. FAUX **Incompatibles=exclusif=disjoints**

E) Jpp ! Ils m'ont tué ! Une pause par pitié ! **Tout est faux** ! Vrai PAUSE POUR TOUT LE MOOOONDE



FIN