Cours 4:Variables aléatoires, Lois de probabilité discrète et continue

Variable aléatoire

Définition

- Exemples: TAS d'une pièce d'usinage, gélules de mdt, cartes à jouer, lancer un dé ou pièce…
- On décrit une opération précise qui mène à un résultat aléatoire.
- L'opération concernée est appelée une **épreuve** et ses résultats aléatoire des **événements élémentaires.**
- On parle de **variable aléatoire** lorsque le résultat aléatoire est un **nombre** (tirer une carte n'est pas un v.a)
- Définition: **Une variable aléatoire est une épreuve menant à des événements élémentaires qui sont des nombres.**

Définition

- Lorsque le résultat d'une expérience où intervient le hasard est **à valeurs dans un ensemble fini** ou au plus dénombrable, on parle de **variable aléatoire discrète.**

- Lorsque le résultat d'une expérience où intervient le hasard est **à valeur dans R ou un intervalle de R,** on parle de **variables à densité,** ou **absolument continues.**

Variable aléatoire discrète

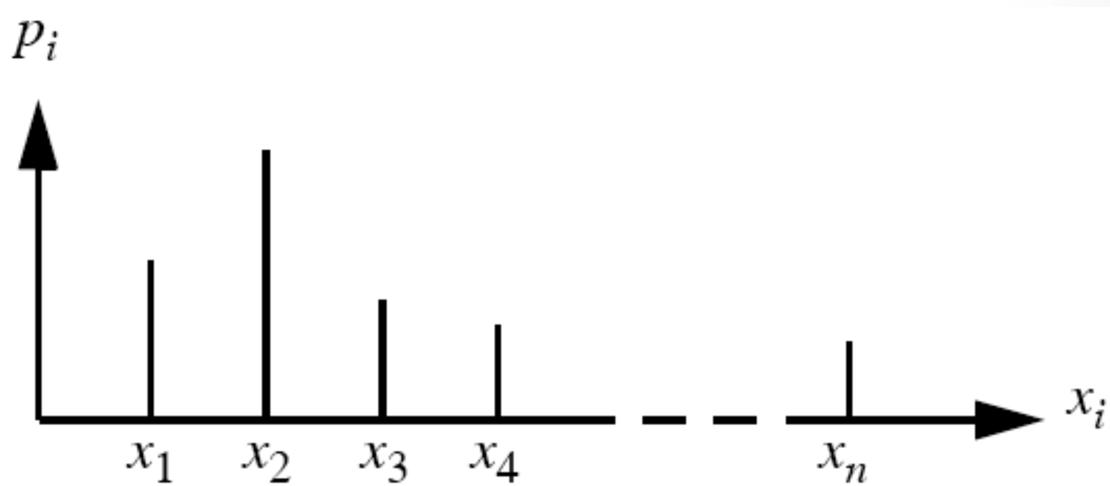
Représentation

- On peut représenter une loi de probabilité X(Ω), c'est à dire l'ensemble des p_i sur les événements {X= x_1 , X= x_2 ,… X= x_n } par une <u>table</u>:

x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_1	p_2	$\dots$	p_n

- Ou par un **diagramme en bâtons:**

Hauteur de x_i=pi



Moyenne

- Définition: La moyenne µ de la v.a X est la valeur moyenne des résultats que l'on obtiendrai en répétant indéfiniment l'épreuve.

$$\mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i$$

Moyenne

Application: Dans un groupe de 10 élèves, 4 ont eu 8/20, 2 ont eu 12 et 4 ont eu 16. Quelle est la moyenne de la classe?

$8 \times 0{,}4 + 12 \times 0{,}2 + 16 \times 0{,}4 = 3{,}2+2{,}4+6{,}4 = 12.$

Espérance

- L'espérance mathématique d'une v.a X est notée E(X). C'est un indicateur de **position**.

- = moyenne

- Dans le calcul de la moyenne, chacune des valeurs x_i intervient d'autant plus que sa probabilité de survenue est importante (ex: notes)

E(kX)	kE(X)
E(X+k)	E(X) + k
E (X+Y)	E(X) + E(Y)

Variance et écart-type

- La variance σ^2 est un indicateur de dispersion qui montre si les différentes valeurs de X sont plus ou moins rapprochées de μ.

- L'écart type σ est la racine carrée de la variance.

Var (X+a)	Var(X)
Var (aX)	a^2Var(X)

Variance

Application: Soient 2 classes de 10 élèves.

Dans la classe 1 : 4 ont eu 8, 2 ont eu 12 et 4 ont eu 16. La moyenne est de 12. Quelle est la variance ?

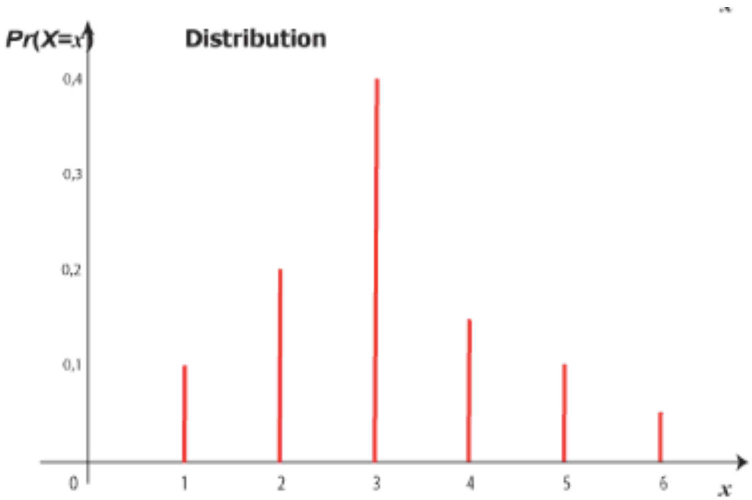
$0{,}4 \times (8-12)^2 + 0{,}2 \times (12-12)^2 + 0{,}4 \times (16-12)^2 = 0{,}4 \times 16 + 0{,}4 \times 16 = 2 \times 6{,}4 = 12{,}8$

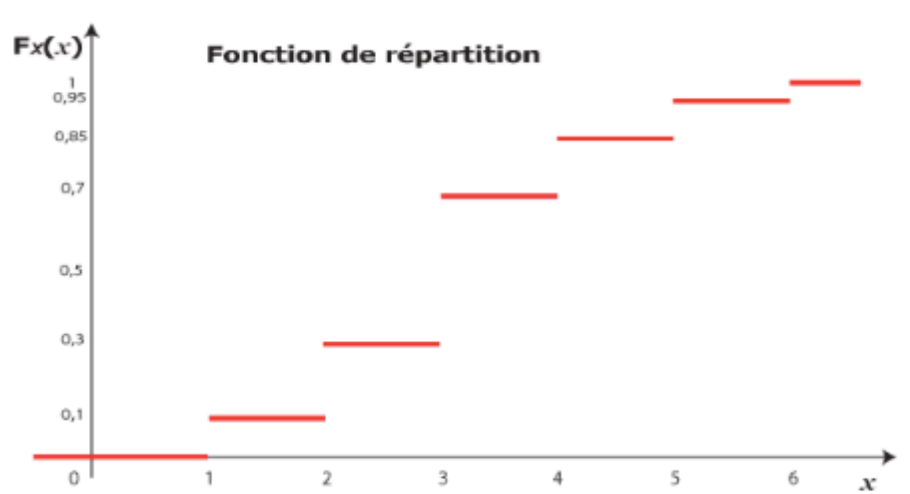
Dans la classe 2: 3 ont eu 11, 4 ont eu 12 et 3 ont eu 13. La moyenne est de 12. Quelle est la variance?

$0{,}3 \times (11-12)^2 + 0{,}4 \times (12-12)^2 + 0{,}3 \times (13-12)^2 = 0{,}3 \times 1 + 0{,}3 \times 1 = 0{,}6$

Fonction de répartition

- Si X est une v.a aléatoire discrète, on a une fonction <u>cumulative</u> car on somme tous les p_i des x_i survenus AVANT x





- La fonction de répartition est une fonction en **escalier.**

Lois de probabilité discrète

Loi de Bernoulli

- Paramètres:
- ➢ p= probabilité d'un succès
- ➢ $q=1-p$ probabilité d'un échec n= nb d'essais
- ➢ X: v.a « nombre de succès » lors d'une épreuve

- Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire dont l'issue se traduit soit par un « succès » soit par un « échec »
- X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, noté B(p):

$$P(X=k)=p^k q^{1-k}$$

- moyenne: $\mu = p$
- Variance: $\sigma^2 = pq$

Loi de Bernoulli

Application : On lance une pièce et on regard si elle tombe sur « pile » ce qui constitue le succès de l'épreuve avec une probabilité de 0,5. Quelle est la probabilité du succès et de l'échec?

$P(X=1)= 0,5$

$P(X=0)= 0,5$

Loi Binomiale

- Epreuves répétées de Bernoulli, cad un processus qui consiste en n esssais indépendant d'une même expérience aléatoire dont l'issue se traduit soit par un « succès » soit par un « échec »
- X: v.a « nombre de succès » après n essais
- X suis une loi Binomiale de paramètre n et p, noté B(n;p)

$$P(X=k)= C^k_n p^k q^{n-k}$$

- Moyenne : **μ= np**
- Variance : **$\sigma^{2=}$ npq**

Loi Binomiale

Application: on répète 3 fois l'expérience de la pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois « pile » ?

P(X=2)=$C^2{}_3$x0,5^2 x0,5 =3x0,5^{2}x0,5=0,375

Loi binomiale et équiprobabilité

- On considère que l'application de la loi binomiale reste valable si le rapport de la taille de l'échantillon n et la taille de la population N est ≤ 0,10. Sinon on utilise la loi Hypergéométrique

Loi de Poisson

- Modélisation de phénomènes aléatoires où les évènements se réalisent sur la base d'une unité de temps, de volume, de surface…
- X suit une loi de Poisson de paramètre λ, noté P(λ)

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

- <u>Moyenne et variance</u> : $\sigma^2 = \mu = \lambda$

Loi de Poisson

Application: On veut connaitre la probabilités qu'il y ait 2 trams allant vers Valrose en 1 heure sachant qu'il y en passe en moyenne 8 par heure.

$P(X=2)=(e^{-8} * 8^{2})/2!$

Loi géométrique

- Epreuves répétées de Bernoulli. On cherche le nombre d'essais où apparaitra le 1er succès.

- X: v.a « nombre d'essais nécessaires juqu'à la réalisation du premier succès »

- X suit une loi géométrique de paramètre p, noté G(p)

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} = pq^{k-1}$$

- Moyenne : $\mu = 1/p$
- Variance : $\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$

Loi hypergéométrique

- Soit une population de N individus parmi lesquels D ont un caractère donné. On prélève un échantillon de taille n, sans remise, soit au fur et à mesure, soit d'un seul coup.
- X: v.a du nombre d'individus de l'échantillon possédant la propriété envisagée.
- X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, D et n, noté H(N; D; n)

$$P(X=k)=\frac{C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

- <u>Moyenne</u> : μ= np
- <u>Variance</u> : $\sigma^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)npq$

Loi Hypergéométrique

Application: Dans une population de 1000 habitants, 150 possèdent les yeux vairons (les yeux sont chacun d'une couleur différente). On tire au sort 200 individus dans cette population. Quelle est la probabilité que la moitié de cet échantillon ait les yeux vairons ?

$P(X=100) = (C^{100}_{150} \times C^{100}_{850}) / C^{200}_{1000})$

Variable aléatoire continues

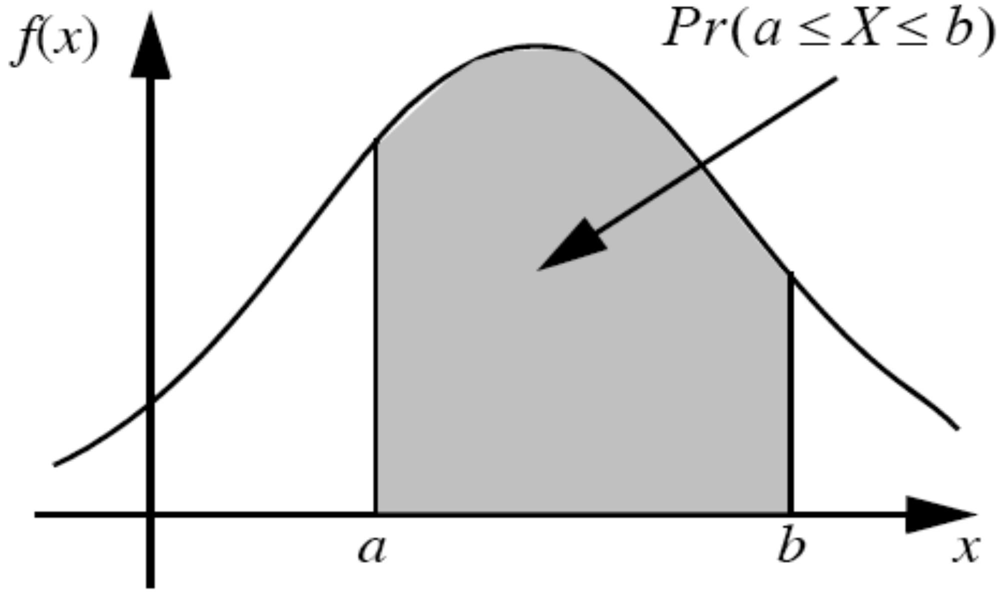
Densité de probabilité

- Ce qui caractérise une v.a continue, c'est quelle a une probabilité nul d'être égale à n'importe quel nombre donné (poids) . Cependant on sait parler de probabilité pour que la v.a X prenne une valeur comprise entre deux valeurs a et b, noté : **P(a ≤ X ≤ b)**

- Définition : Soit X une v.a aléatoire continue prenant des valeurs comprises entre a et b. on définit la loi de probabilité de X, à l'aide de la fonction f(x) appelée **densité de probabilité** de X telle que

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

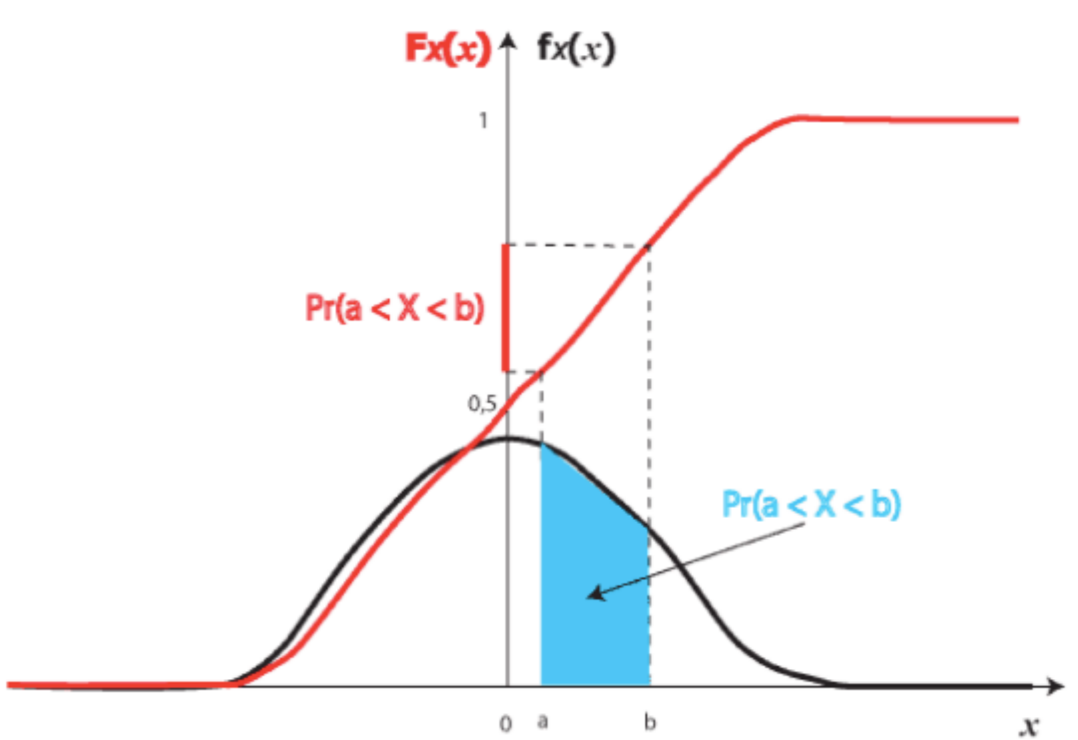
Densité de probabilité



- La probabilité de P(a≤ X≤ b) est égale à la surface sous la courbe.

Fonction de répartition

- C’est une fonction **monotone croissante** (plus en escalier)
- Partant de 0 pour x→ -∞
- Atteignant 1 pour x→ +∞



Loi de probabilité continues

Loi exponentielle

- Fonction de densité: $f(x)= \lambda e^{-\lambda x}$
- λ= taux de défaillance instantané

- Fonction de répartition $F(x)= P(X \leq x)= 1-e^{-\lambda x}$
- Utilisation: décrire un processus de mortalité dans lequel le risque instantané de décès est constant

- <u>Moyenne</u> : $\mu=1/\lambda$
- <u>Variance</u> : $\sigma^2=1/\lambda^2$

Loi exponentielle

Application : Un PACES achète un feutre noir pour remplir ses grilles qcm.

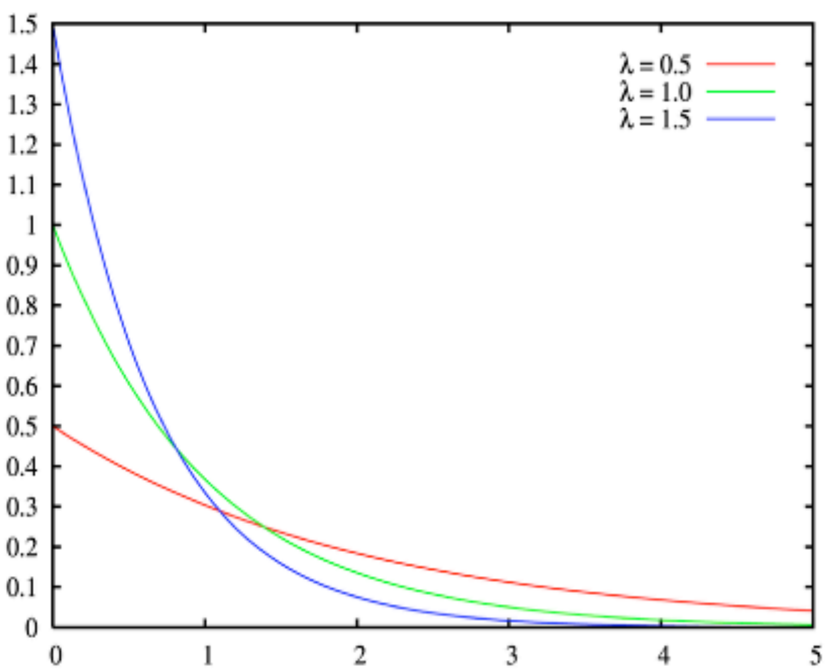
La durée de vie du feutre suit une loi exponentielle tel que $\lambda=1/12$ en année. Quelle est la probabilité qu'il marche encore après 1 ans ?

$P(X\geq1)=1-P(X\leq1)=1-F(1)=1-(1-e^{-1/12})=e^{-1/12}$

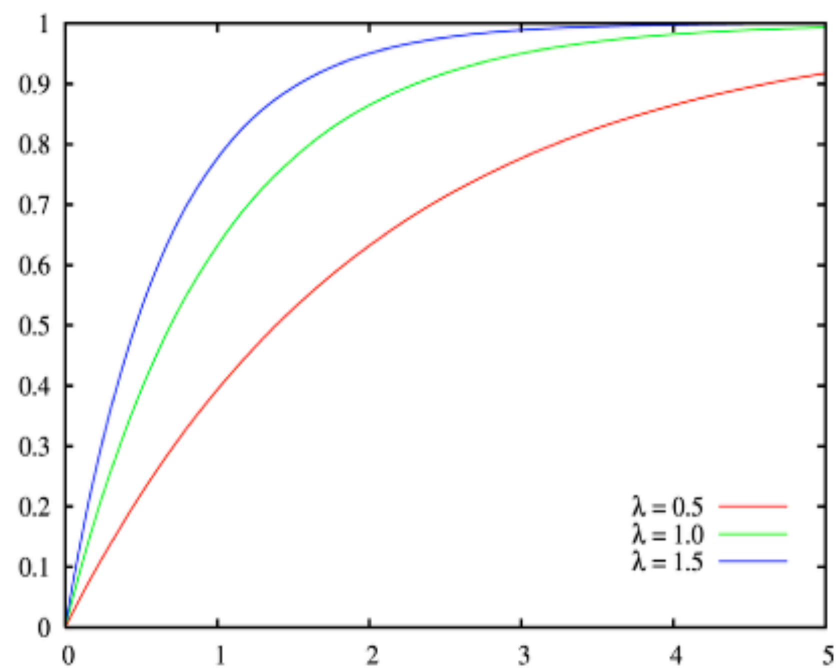
Loi exponentielle

- Lien avec la loi de Poisson: Si un événement se réalise selon une loi de Poisson de paramètre λ, le temps entre deux réalisations consécutives de l’événement considéré est distribué selon un loi exponentielle de paramètre 1/λ

Densité de probabilités (f):



Fonction de répartition (F):



Loi uniforme

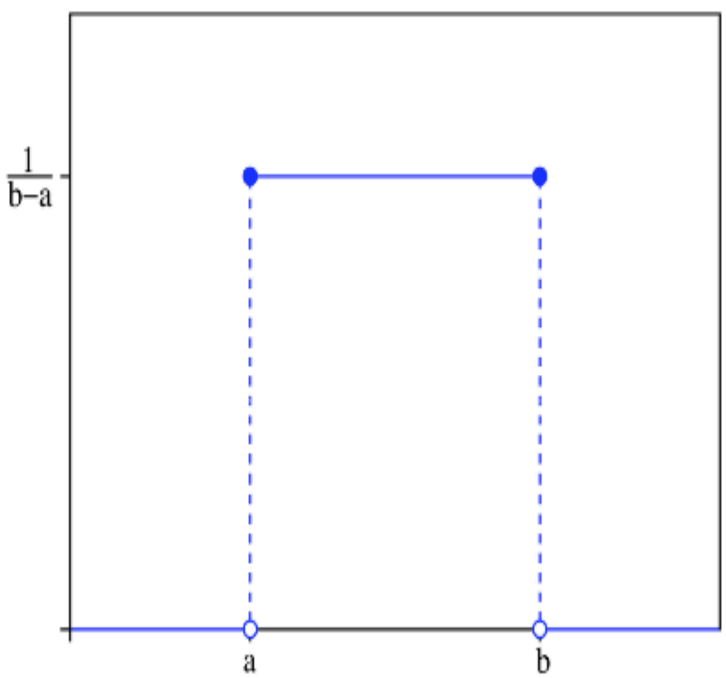
- Fonction de densité : $f(x)= 1/(b-a)$

- Utilisation: La face du dé est un exemple de loi uniforme car les 6 valeurs ont la même probabilité.

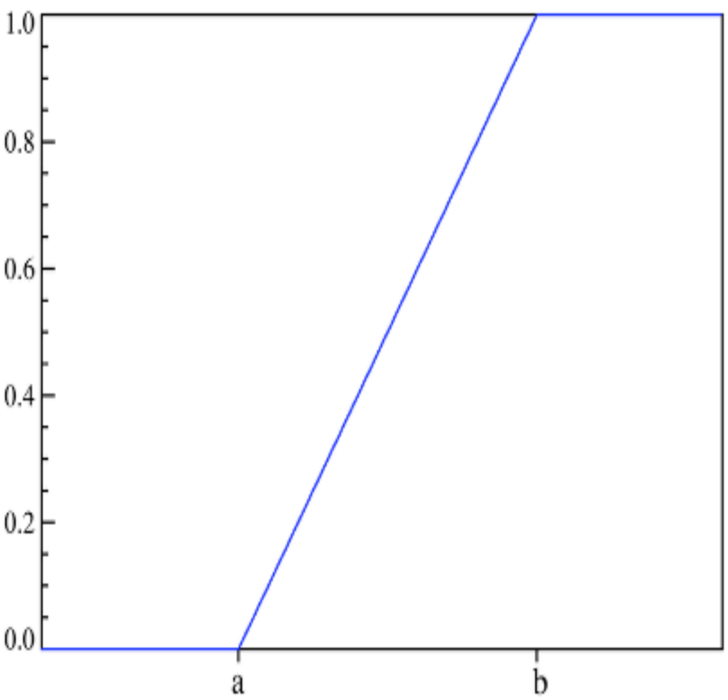
- <u>Moyenne</u> : $\mu= (a+b)/2$
- <u>Variance</u> : $\sigma^2= (b-a)^2/12$

Loi uniforme

Densité de probabilités (f):



Fonction de répartition (F):



Loi normale

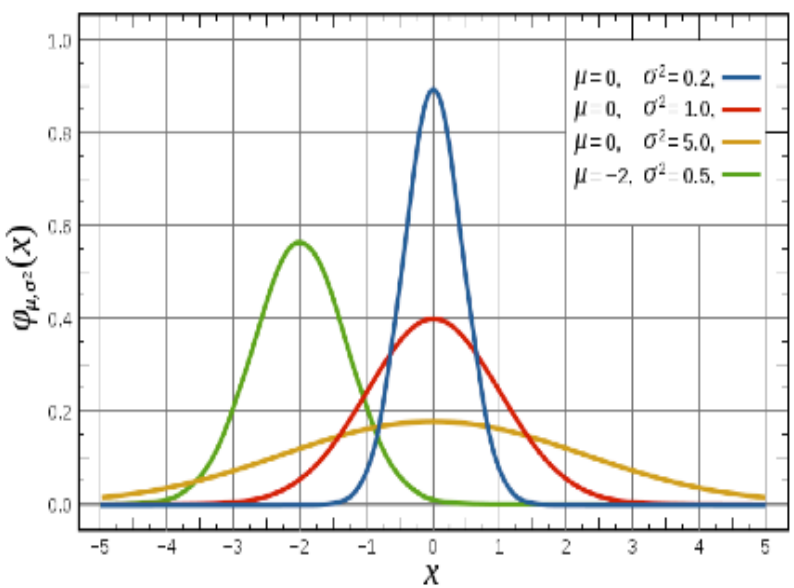
- Fonction de densité: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

- La densité de probabilité d'une v.a normale de moyenne µ et d'écart type σ est symétrique autour de µ et a 2 points d'inflexion aux abscisses µ-σ et µ+σ

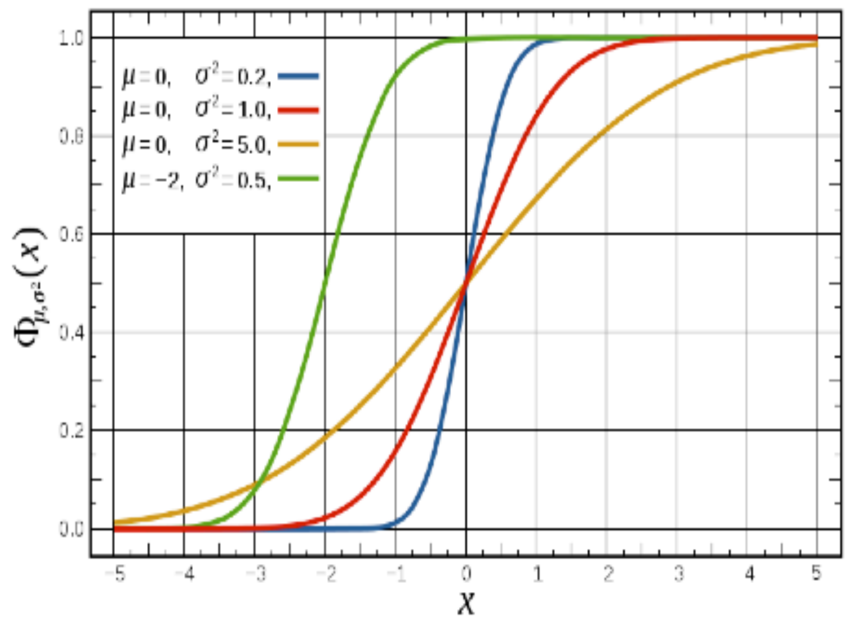
- La loi normale sert tout le temps. Appareils de mesure pour les bilans biologiques

Loi normale

Densité de probabilités (f):



Fonction de répartition (F):



Loi normale

- **Valeurs limites importantes à savoir**
- il y a 10 chances sur 100 pour que $X < \mu - 1,65\sigma$ ou $X > \mu + 1,65\sigma$
- il y a 5 chances sur 100 pour que $X < \mu - 1,96\sigma$ ou $X > \mu + 1,96\sigma$
- il y a 1 chance sur 100 pour que $X < \mu - 2,58\sigma$ ou $X > \mu + 2,58\sigma$
- il y a 1 chance sur 1000 pour que $X < \mu - 3,30\sigma$ ou $X > \mu + 3,30\sigma$

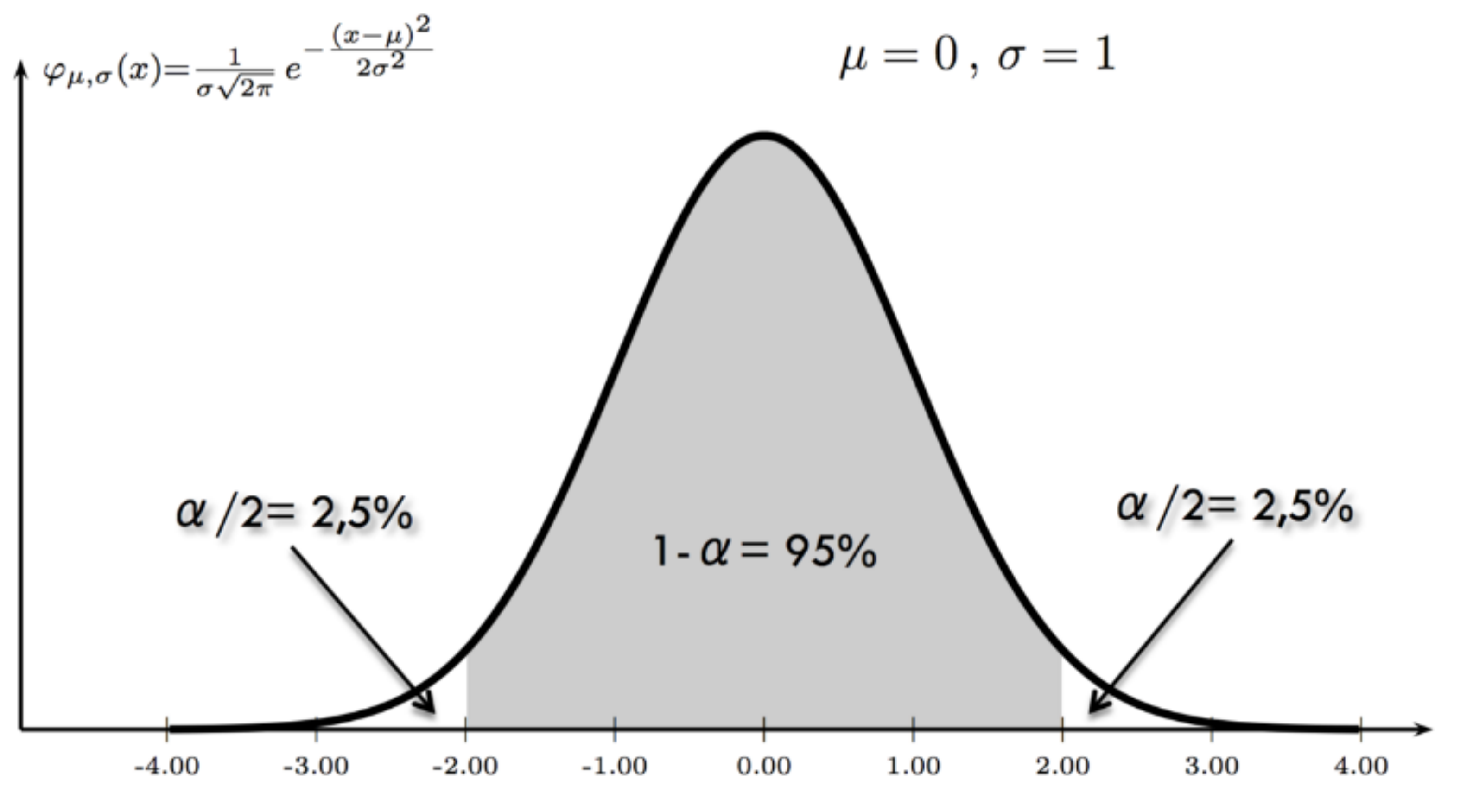
- Connaître $\varepsilon = 1,96$ et $\varepsilon = 2,58$ +++

Loi normale centrée réduite

- On appelle **loi normale centrée réduite** la loi normale de **moyenne 0** et de **variance 1**. Une variable suivant une loi normale centrée réduite est notée Z

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Loi normale centrée réduite



Loi Normal

Application: Pour être mannequin féminin, la taille minimale est de 175 cm. Si la taille moyenne des femmes françaises est de 165 cm, et qu'elle à un écart type de 4 cm, alors quel est le pourcentage de femmes ne pouvant être mannequin, à 5% près ?

On cherche $P(X \leq 175)$, donc X suit une loi normale $N(165 ; 4)$. On va passer cette loi normale en loi centré réduite $N(0 ; 1)$.

$Z = (175-165)/4 = 2{,}5$

Donc, on cherche $P(Z \leq 2{,}5)$ dans la table de la loi normale centré réduite.

On trouve 0,9938, c'est à dire 99,38% des femmes françaises ne peuvent pas être mannequin car elles sont trop petites.

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Approximations

Approximations

- **Loi binomiale → Loi de Poisson**

✓ $n > 50$

✓ $p \leq 0,10$

✓ $np < 5$

$$\mathfrak{B}(n;p) \to \mathfrak{P}(\lambda = np)$$

- **Loi Binomiale → Loi Normale**

✓ $np \geq 5$

✓ $nq \geq 5$

$$\mathfrak{B}(n;p) \to \mathfrak{N}(np; \sqrt{npq})$$

Approximations

- **Loi de Poisson → loi normale**

✓ λ > 25

$$\mathfrak{P}(\lambda) \rightarrow \mathfrak{N}(\lambda; \sqrt{\lambda})$$