Cours 1b : Probabilités et évènements

➢ ***Population :*** ensemble d'objets de même nature, fictifs ou réels (les habitants de la France).

➢ ***Echantillon :*** sous ensemble d'une population, utilisé lors des études statistiques car plus accessible, moins grand (les habitants de Nice).

2 problèmes lors d'une étude avec échantillon :

- **La représentativité** → On n'observe que partiellement la caractéristique. Peut-on extrapoler à la population ?
- **La confiance** → On a des mesures différentes pour chaque échantillon constitué d'individus différents.

I/ Ensembles et éléments

A) Définitions

➢ ***Ensemble :*** c'est une liste, une collection d'objets définis

➢ ***Elément :*** objet d'un ensemble

➢ ***Ensemble défini en extension*** = Il est explicite, c'est-à-dire **qu'on liste tous ses éléments.**

(Ex : A = (1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6) pour le lancer d'un dé)

➢ ***Ensemble défini en compréhension*** = Il est implicite, c'est-à-dire qu'on ne **donne que les propriétés qui caractérisent ses éléments.**

(Ex : A = [les résultats possibles du lancer d'un dé seul])

➢ ***Notations :***

- E ou Ω est « l'ensemble universel »
- ∈ se lit « appartient »
- ∅ correspond à « l'ensemble vide »
- $A \subset B$ signifie « A inclus dans B »

B) Opérations

1) Union → A ∪ B

= ensemble des éléments appartenant à A ou à B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

2) Intersection → A ∩ B

= ensemble des éléments communs à A et à B

= A et B sont disjoints ou incompatibles si A ∩ B = ∅

3) Complémentaire → $\overline{A}$ ou complémentaire de A

= ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

4) Différence → A – B

= ensemble des éléments qui appartiennent à A sans appartenir à B

5) Différence symétrique → A Δ B

= ensemble des éléments appartenant soit à A soit à B sans appartenir à A ∩ B. Ce lien est exclusif : on ne peut pas appartenir aux deux.

$$A \Delta B = A \cup B - A \cap B$$

6) Inclusion → $A \subset B$

= la survenue de l'évènement A entraîne celle de l'évènement B
= A est inclus dans B → P(A) ≤ P(B)

7) Autre → $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

C) Types d'ensembles

- ***Ensemble fini :*** contient un nombre fini d'éléments

  → **Toujours dénombrable**
  → L'ensemble vide est un ensemble fini

- ***Ensemble infini :*** contient un nombre infini d'éléments

  Peut être → **Dénombrable** : chaque élément correspond à un unique entier naturel (*ex : $\mathbb{N}$, les entiers naturels*)

  → **Indénombrable** : non dénombrable (*ex : $\mathbb{R}$, les nombres réels*)

- ***Ensemble produit*** = **Ensemble A x B,** c'est-à-dire l'ensemble des couples ordonnés (a,b) où a ∈ A et b ∈ B

  Ex: Soient A=[a; b; c] et B=[1;2 ;3]
  → AxB =[(a;1),(a;2),(b;1),(b;2),(c;1),(c;2)]

- ***Produit cartésien :*** produit de n ensembles, un élément de ce produit s'appelle un n-uplet.

- ***Cardinal d'un ensemble :*** = **Card(E)**, correspond au nombre d'éléments que contient un ensemble dénombrable

  → Pour un ensemble produit : **Card(AxB) = Card(A) x Card(B)**

  Ex : pour le résultat du lancer d'un dé, le cardinal est 6

- ***Familles d'ensemble :*** **L'ensemble des sous ensembles de A** constitue **la famille des parties de A.**

  →Nombre de parties d'un ensemble à p éléments = 2^p

  Ex : Soit une pièce de monnaie dont l'ensemble A est {pile, face}.
  Un sous ensemble B : {pile}, un autre sous ensemble C : {face} et un sous ensemble D : {∅}
  L'ensemble des parties de A est P(A) = { ∅ , {pile}, {face}, {pile,face} }.
  Le nombre de parties de A est : $2^2 = 4$

- ***Partition de A :*** subdivision de A en sous ensembles disjoints dont la réunion forme A

  A = A1 U A2 U A3 U A4 U A5

II/ Probabilités

- ***Phénomène aléatoire :*** phénomène dont on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance = **hasard**.
  Ces phénomènes sont modélisés par les calculs statistiques.
  (*ex : le lancer d'un dé*)

- ***Phénomène déterministe :*** phénomène dont on peut prévoir le résultat à l'avance (via les lois de la physique par exemple). Ils ont une **régularité de comportement**.
  (ex : la trajectoire d'une balle modélisée par un calcul physique)

A) Définitions

- ***Epreuve :*** expérience aléatoire *(ex : le lancer d'un dé)*

- ***Evènement certain :*** noté Ω, **ensemble des résultats possibles de cette épreuve.** Chaque résultat sera forcément un élément de Ω.
  (ex : avoir un nombre entier entre 1 et 6 pour le lancer d'un dé)

- ***Evènement :*** **sous ensemble de Ω**, ensemble de résultats si Ω est dénombrable.
  (ex : avoir un chiffre pair)

- ***Evènement élémentaire :*** **résultat unique de Ω**, défini par un résultat précis.
  (ex : avoir un 2)

- ***Evènement impossible :*** ensemble vide ∅, ne contient aucun des résultats possibles.
  (ex : obtenir un 9)

B) Notions élémentaires de probabilités

- On associe à une probabilité sur Ω une **fonction P(A)** qui à chaque **évènement A** de Ω associe **un réel de l'intervalle [0,1]**.

- **Une probabilité est donc forcément comprise entre 0 et 1**.

- La probabilité P est censée **mesurer les chances de réalisation de cet événement.**

- **$P(\emptyset) = 0$**

- **$P(\Omega) = 1$**

- **Propriété d'additivité forte** → se généralise à un nombre quelconque n d'éléments (formule de Poincaré)

  Pour n=3 →

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-(P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C))+P(A\cap B\cap C)$$

- **Equiprobabilité** → **Même probabilité pour chaque évènement élémentaire : 1 / Card(Ω)**

  Ex: Probabilité d'avoir un 5 lors du lancer d'un dé ?
  Card(Ω) = 6 (6 possibilités de résultat)
  P(A = avoir un 5) = 1/6

- **Probabilité sur un ensemble fini** → La somme des probabilités des évènements de Ω vaut 1

III/ Dénombrements

1) p-liste avec remise → Ordonné / Avec remise

$$Card(E^p) = Card(E)^p$$

→ On **prend un élément dans E**, on **l'y replace** et on **répète p fois cette épreuve.** Pas d'associations d'objets.

<u>Exemple</u> : on tire 3 cartes successivement dans un jeu de 32 cartes en remettant à chaque fois la carte dans le paquet.
Pour le premier tirage on a 32 possibilités ; pour le second tirage on a encore 32 possibilités puisqu'on a remis la carte ; idem pour le troisième.
*Le nombre de possibilités est donc de 32 * 32 * 32 = 32^3 = $Card(E)^p$*

2) Arrangements de n éléments pris p à p

→ **Ordonné / SANS remise**

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

→ On prend **SUCCESSIVEMENT** p éléments parmi n **sans les Remettre.**

*<u>Exemple</u> : On dispose de 3 cartes : As, Roi, Dame. On tire **SUCCESSIVEMENT** 2 cartes sans remise.*
*Le nombre d'arrangements possibles (= le nombre de couples de cartes possibles **en tenant compte de l'ordre de tirage**) est égal à :*

A_3^2 = 3 ! / (3-2)! = 3*2*1 / 1 = 6, *soit (As, Roi) (As, Dame) (Roi, As) (Dame, As) (Dame, Roi) (Roi, Dame)*

3) Arrangements avec répétition → Ordonné / avec remise

$$n^p$$

→On **prend un élément** parmi n **qu'on remet ensuite** et **on répète p fois** cette épreuve.
Possibilité d'associations d'objets.

<u>Exemple</u> : On veut savoir combien de mot de 4 lettres peuvent être formés avec les 26 lettres de l'alphabet.
On a 26 possibilités pour la première lettre, 26 pour la seconde, 26 pour la troisième et idem pour la quatrième. On peut donc faire 26^4 mots de 4 lettres.

4) Permutation d'un ensemble fini à n éléments

→ **Ordonné / SANS remise**

$$P_n = n!$$

→ **On prend les éléments 1 à 1** sans les remettre **jusqu'à épuisement.**

*<u>Exemple</u> : On dispose de 4 cartes : As, Roi, Dame et Valet de coeur. On les tire une à une **sans les remettre** jusqu'à ce qu'il n'y en ait plus.*
Le nombre de suite de cartes (= permutations) possibles est donc :

P_4 = 4 ! = *4 x 3 x 2 x 1 = 24 permutations.*

5) Permutation avec répétition → Ordonné / SANS remise

$$P_n = \frac{n!}{(k_1! \times k_2! \times \dots \times k_x!)}$$

→ Les éléments sont répartis en x catégories k différentes
→ **On prend les éléments 1 à 1 jusqu'à épuisement** en ne tenant compte que des catégories.

<u>Exemple</u>: 6 chevaux sont au départ d'une course hippique : 2 chevaux bleus (B1 et B2), 3 Rouges (R1, R2 et R3) et 1 Jaune (J1).
*Le nombre de classements possibles à l'arrivée **en ne tenant compte que des catégories** est :*

***Pn = 6 ! / (2 ! * 3 ! * 1 !)** = 6*5*4*3*2*1 / (2*1*3*2*1*1)*
*= 6*5*4*3*2*1 / (6*2*1*1*1)= 5*4*3 = 60*

→ L'ordre au sein d'une même catégorie n'est pas important : (R1, B2, J1, R3, B1, R2) = (R2, B1, J1, R1, B2, R3) par exemple.

n = Nombre total de chevaux au départ de la course.
Il y a 3 catégories de chevaux : Bleu, Rouge et Jaune.
k1 = nombre de chevaux Bleus, k2 = nombre de chevaux Rouge,
k3 = nombre de chevaux Jaunes.

6) Combinaison de n éléments pris p à p parties d'un ensemble

→ **SANS ordre / SANS remise**

$$C_n^p = \frac{n!}{(p! \times (n-p)!)}$$

→ On prend **SIMULTANEMENT** p éléments parmi n, on en laisse donc n-p
→ On crée donc 2 séries complémentaires

<u>Exemple</u> : On dispose de 3 cartes : As, Roi, Dame.
*On tire **SIMULTANEMENT** 2 cartes sans remise.*
Le nombre de combinaisons possibles (= le nombre de couples de cartes possibles) est égal à :

$\boldsymbol{C_3^2 = 3\,!\,/\,(2\,!\,*\,(3-2)\,!) = 3*2*1\,/2*1*1 = 3}$

→ *soit {As, Roi} {As, Dame} {Dame, Roi}*

Fin !! N'oubliez pas que si vous n'aimez pas la biostat, la biostat vous aime quand même ☺
Tom_C